

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA -



Studijska 2022/2023 godina

1. UVOD

2. OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

- **POVRŠINA** $A = \int_A dA$
Jedinica mjere (dužina)², najčešće cm²

Uvijek pozitivna

- **STATIČKI MOMENTI POVRŠINE**

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA$$

Jedinica mjere (dužina)³, najčešće cm³

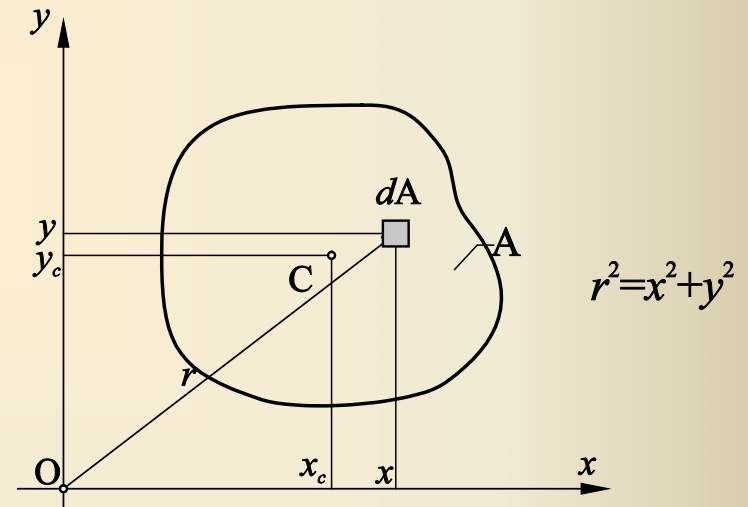
Može biti pozitivan, negativan ili nula

Nula je za težišne ose

- **KOORDINATE TEŽIŠTA**

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A} \quad y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}$$

Jedinica mjere (dužina), najčešće cm



2. OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

- MOMENTI INERCIJE**

- Aksijalni momenti inercije*

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

Jedinica mjere (dužina)⁴, najčešće cm⁴

Uvijek pozitivni

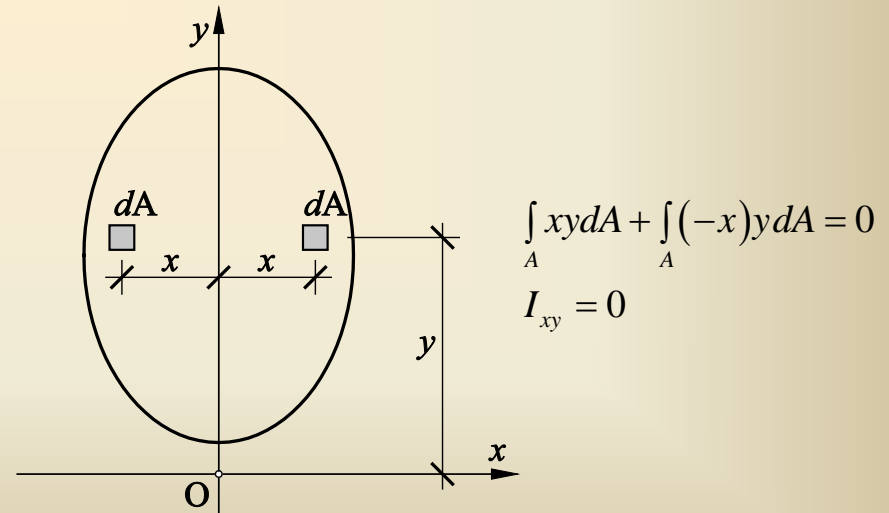
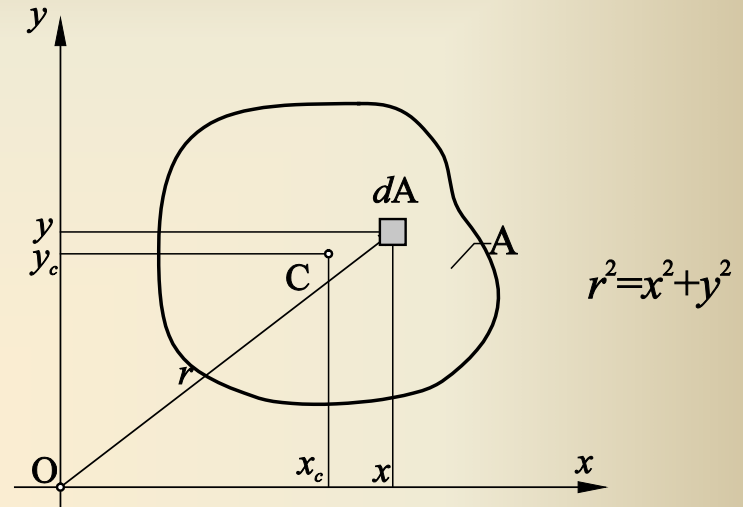
- Centrifugalni moment inercije*

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Jedinica mjere (dužina)⁴, najčešće cm⁴

Može biti pozitivan, negativan ili nula

Ako je površina simetrična u odnosu na jednu od koordinatnih osa $I_{xy}=0$



2. OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

- **MOMENTI INERCIJE**

- *Polarni moment inercije*

$$I_0 = \int_A r^2 dA$$

Jedinica mjere (dužina)⁴, najčešće cm⁴

Uvijek pozitivni

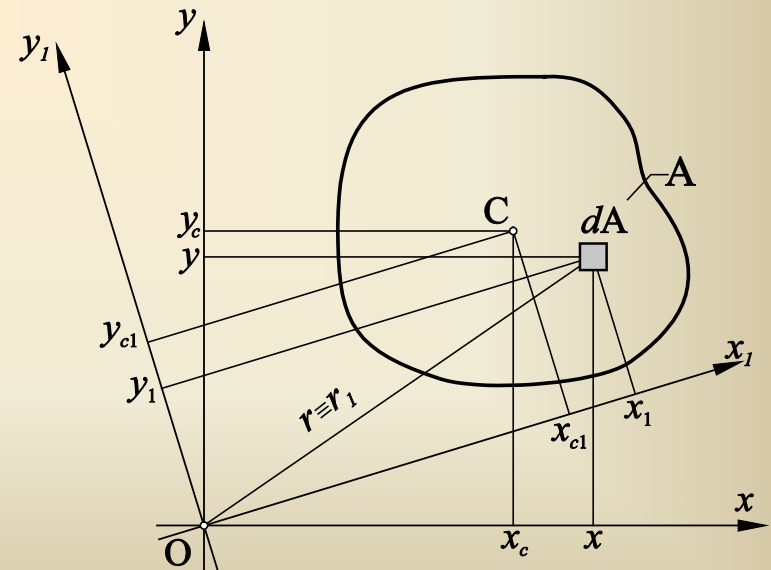
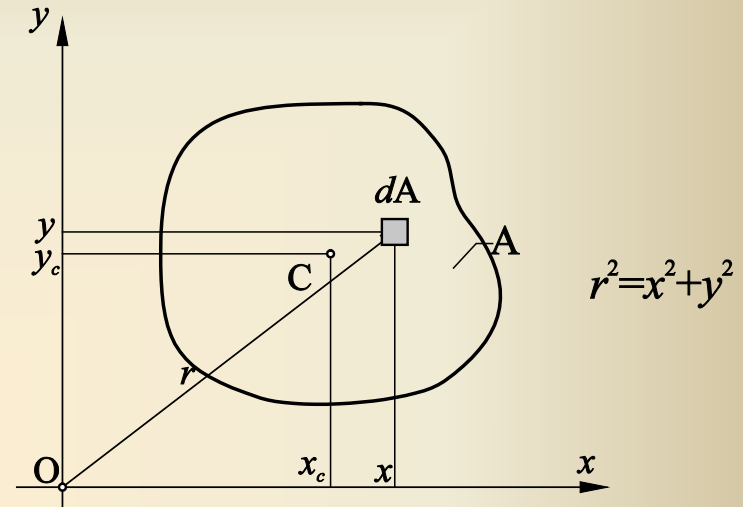
$$I_0 = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

$$I_0 = \text{const}$$

$$I_0 = I_x + I_y \quad I_0 = I_{x_1} + I_{y_1}$$

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} = \text{const}$$

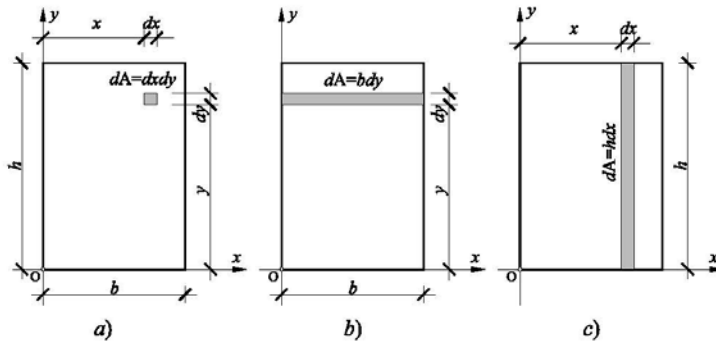
Zbir aksijalnih momenata inercije površine u odnosu na dvije ortogonalne ose se ne mijenja pri rotaciji koordinatnog sistema oko koordinatnog početka.



2. OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

RAČUNSKI PRIMJERI

1. Pravougaonik



Za određivanje geometrijskih karakteristika pravougaonika možemo uzeti elemente površine sa slike pod a, b i c.

a) $dA = dx dy$

$$A = \int_A dA = \int_A dx dy = \int_0^b dx \int_0^h dy = bh$$

b) $dA = b dy$

$$A = \int_A dA = \int_A b dy = b \int_0^h dy = bh$$

c) $dA = h dx$

$$A = \int_A dA = \int_A h dx = h \int_0^b dx = bh$$

Zbog jednostavnosti za određivanje ostalih geometrijskih karakteristika korišćemo elemente površine sa slike pod b i c.

Statički momenti površine

$$S_x = \int_A y dA = \int_A y b dy = b \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2} \quad (dA = b dy)$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_A x h dx = h \int_0^b x dx = \frac{hb^2}{2} \quad (dA = h dx)$$

Težište presjeka

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{hb^2}{2}}{bh} = \frac{b}{2} \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

Aksijalni momenti inercije

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A b y^2 dy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3} \quad (dA = b dy)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A h x^2 dx = h \int_0^b x^2 dx = \frac{hb^3}{3} \quad (dA = h dx)$$

Centrifugalni moment inercije

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A xy dx dy = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4} \quad (dA = dx dy)$$

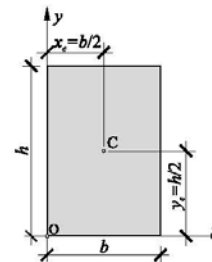
I ovaj integral se može svesti na jednostruki ako se uzme element $dA = b dy$, a koordinate njegovog težišta su $(I/2)b$ i y

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A \frac{b}{2} y b dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Polarni moment - zbir aksijalnih momenata.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

Konačno, geometrijske karakteristike pravougaonika



$$A = bh \quad x_c = \frac{b}{2} \quad y_c = \frac{h}{2}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{2} \quad S_y = \frac{hb^2}{2}$$

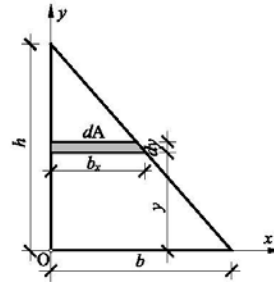
$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4} \quad I_0 = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

2. OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

RAČUNSKI PRIMJERI

2. Pravougli trougao



Za određivanje aksijalnog momenta inercije I_x posmatramo traku elementarno male debljine dy čije površina je jednaka $dA = b_x dy$, a koordinate težišta $b_x/2$ i y .

Iz proporcije trouglova se dobija:

$$b_x : b = (h - y) : h \quad b_x = \frac{b}{h}(h - y)$$

$$dA = b_x dy = \frac{b}{h}(h - y) dy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 \frac{b}{h}(h - y) dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}$$

Istim postupkom se dobijaju aksijalni momenti inercije I_x (posmatra se traka elementarno male debljine dx u pravcu y ose), kao i centrifugalni moment inercije I_{xy} (posmatra se element u presjeku pomenutih traka dimenzija $dx dy$).

Konačno, momenti inercije pravouglog trougla

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$
$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} \quad I_0 = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

3. PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI TRANSLACIJA KOORDINATNOG SISTEMA – Steiner-ove formule

I_ξ I_η i $I_{\xi\eta}$ - poznati **centralni momenti inercije** za težišne (centralne) ose $\xi\eta$

$I_x=?$, $I_y=?$ i $I_{xy}=?$ - traže se momenti inercije za par upravnih osa xy koje su paralelne osama $\xi\eta$ i nalaze se na poznatim odstojanjima a odnosno b .

Veza između koordinata dva sistema je

$$x = \xi + b \quad y = \eta + a$$

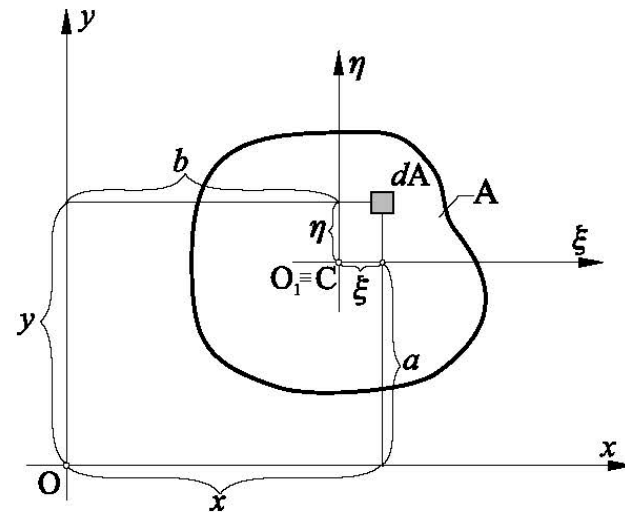
$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (\eta + a)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2a \int_A \eta dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA; \quad S_\xi = \int_A \eta dA = 0; \quad A = \int_A dA$$

$$I_x = I_\xi + a^2 A$$

Analogno se dobija: $I_y = I_\eta + b^2 A$,

$$\text{kao i centrifugalni moment: } I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (\xi + b)(\eta + a) dA = \int_A \xi\eta dA + a \int_A \xi dA + b \int_A \eta dA + ab \int_A dA = I_{\xi\eta} + abA$$



$$\begin{aligned} I_x &= I_\xi + a^2 A \\ I_y &= I_\eta + b^2 A \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + abA \end{aligned} \quad \text{– Steiner-ove jednačine}$$

Moment inercije površine u odnosu na neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije u odnosu na paralelnu težišnu osu i položajnog momenta inercije.

3. PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI TRANSLACIJA KOORDINATNOG SISTEMA – Steiner-ove formule

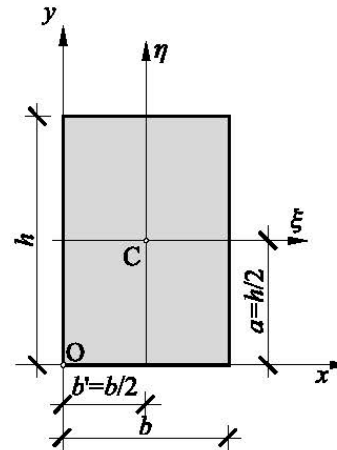
RAČUNSKI PRIMJERI

1. Za pravougaoni poprečni presjek na slici sračunati sopstvene momente inercije I_ξ , I_η i $I_{\xi\eta}$

$$I_\xi = I_x - a^2 A = \frac{bh^2}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_\eta = I_y - b'^2 A = \frac{hb^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - ab' A = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{h}{2} \frac{b}{2} bh = 0$$



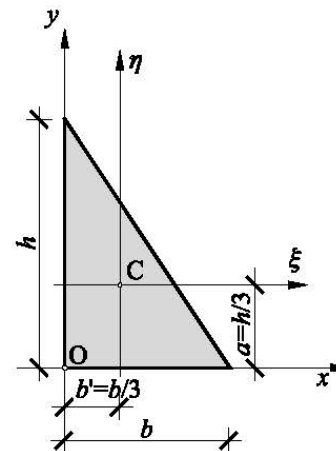
$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= \frac{bh^3}{12} \\ I_\eta &= \frac{hb^3}{12} \\ I_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}}$$

2. Za pravougli trougaoni poprečni presjek na slici sračunati sopstvene momente inercije I_ξ , I_η i $I_{\xi\eta}$

$$I_\xi = I_x - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_\eta = I_y - b'^2 A = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - ab' A = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{h}{3} \frac{b}{3} \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= \frac{bh^3}{36} \\ I_\eta &= \frac{hb^3}{36} \\ I_{\xi\eta} &= -\frac{b^2 h^2}{72} \end{aligned}}$$

Sopstveni centrifugalni moment inercije trougla je negativan.

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA -



Studijska 2022/2023 godina

4. PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA

Poznate veličine: I_x , I_y , I_{xy} i pozitivni ugao φ (suprotno kretanja kazaljke na satu)

Potrebno izračunati: I_ξ , I_η i $I_{\xi\eta}$

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \eta = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 dA = \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A xy dA + \sin^2 \varphi \int_A x^2 dA$$

$$\int_A y^2 dA = I_x \quad \int_A x^2 dA = I_y \quad \int_A xy dA = I_{xy}$$

$$I_\xi = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$I_\eta = I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$I_{\xi\eta} = (I_x - I_y) \sin \varphi \cos \varphi + I_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

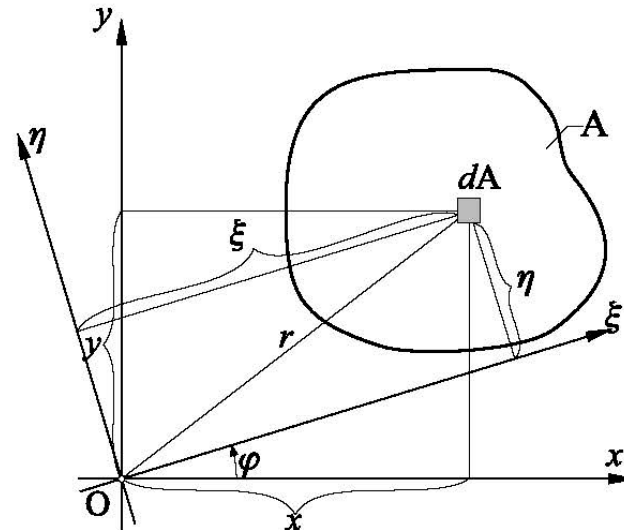
$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$



4. PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA

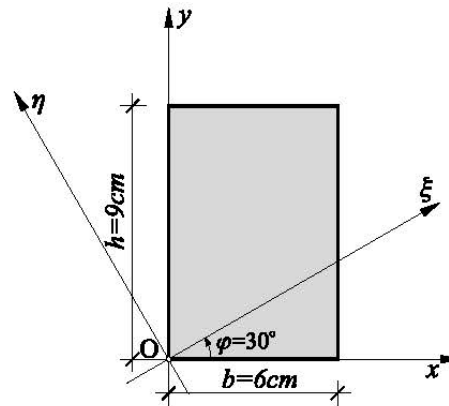
Primjer 1.

Za pravougaoni poprečni presjek na slici izračunati momente inercije za koordinatni sistem $\xi\eta$.

$$I_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{6 \cdot 9^3}{3} = 1458 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3} = \frac{9 \cdot 6^3}{3} = 648 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} = \frac{6^2 \cdot 9^2}{4} = 729 \text{ cm}^4$$



$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}(1458 + 648) + \frac{1}{2}(1458 - 648)\cos 60^\circ - 729\sin 60^\circ = 624.17 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}(1458 + 648) - \frac{1}{2}(1458 - 648)\cos 60^\circ + 729\sin 60^\circ = 1481.83 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(1458 - 648)\sin 60^\circ + 729\cos 60^\circ = 715.24 \text{ cm}^4$$

5. GLAVNE OSE I GLAVNI MOMENTI INERCIJE

$$\frac{dI_{\xi}}{d\varphi} = -(I_x - I_y) \sin 2\varphi - 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\frac{dI_{\eta}}{d\varphi} = (I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{- za } (I_x - I_y) > 0 \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$$

$$\text{- za } (I_x - I_y) < 0 \quad \alpha = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) + 180^\circ \right]$$

(1) i (2) - glavne ose inercije; I_1 i I_2 - glavni momenti inercije

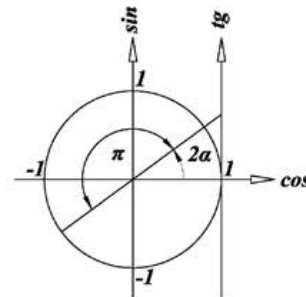
$$I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

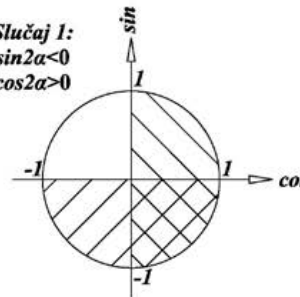
$$I_{12} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

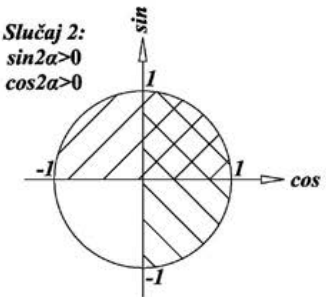
$$\begin{cases} \operatorname{sign}[\sin 2\alpha] = \operatorname{sign}[-2I_{xy}] \\ \operatorname{sign}[\cos 2\alpha] = \operatorname{sign}[I_x - I_y] \end{cases}$$



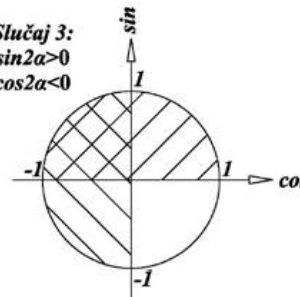
Slučaj 1:
 $\sin 2\alpha < 0$
 $\cos 2\alpha > 0$



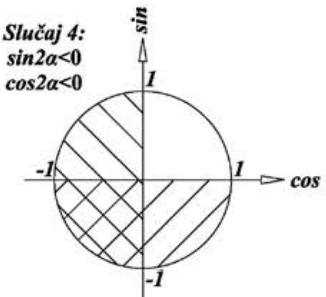
Slučaj 2:
 $\sin 2\alpha > 0$
 $\cos 2\alpha > 0$



Slučaj 3:
 $\sin 2\alpha > 0$
 $\cos 2\alpha < 0$



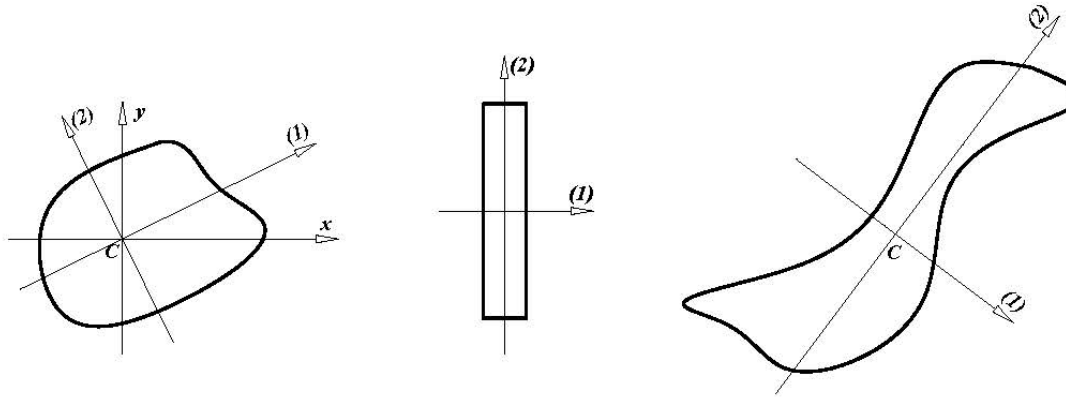
Slučaj 4:
 $\sin 2\alpha < 0$
 $\cos 2\alpha < 0$



Svaka osa simetrije ravne površine je ujedno i jedna od glavnih osa inercije, a druga glavna osa je upravna na nju.

5. GLAVNE OSE I GLAVNI MOMENTI INERCIJE

Fizičko značenje glavnih (centralnih) momenata inercije i glavnih (centralnih) osa inercije



Primjer 2.

Za pravougaonik iz primjera 1. odrediti glavne ose i glavne momente inercije.

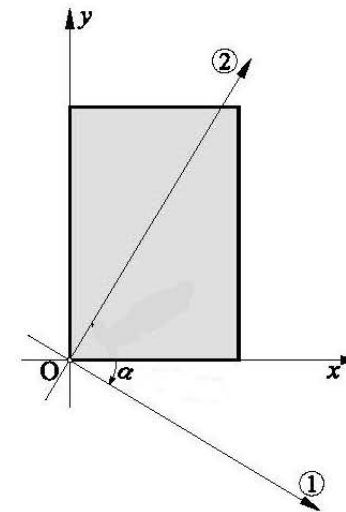
Položaj glavnih osa inercije
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot 729}{1458 - 648} = -1.800$$

Pošto je $I_x - I_y > 0$
$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1.800) = -30.74^\circ$$

Glavni momenti inercije
$$I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 1886.95 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 219.05 \text{ cm}^4$$

Kontrola: $I_x + I_y = I_1 + I_2$ $1458 + 648 = 1886.95 + 219.05$ $2106 = 2106$



6. MOHR-OV KRUG INERCIJE

$$I_{\xi} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$

Kvadriranjem ova dva izraza i njihovim sabiranjem dobijamo:

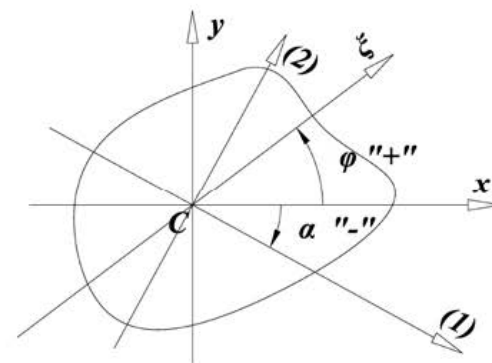
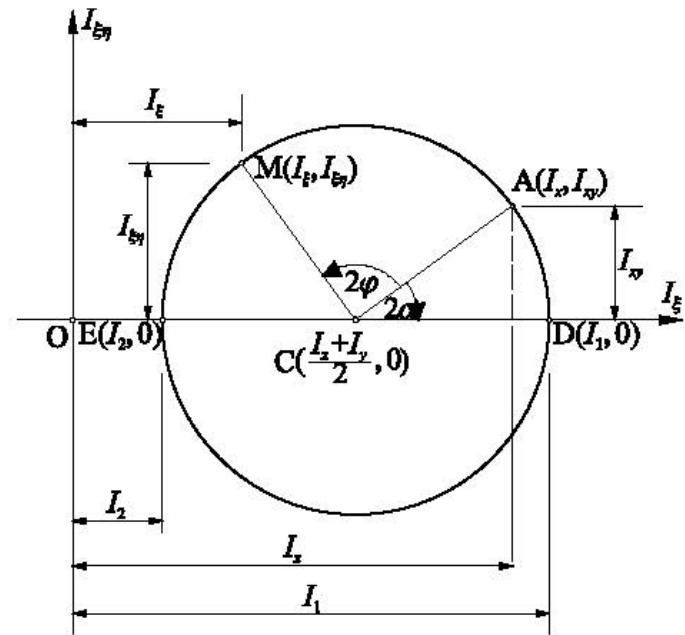
$$\left(I_{\xi} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

U koordinatnom sistemu I_{ξ} i $I_{\xi\eta}$ ova jednačina predstavlja krug

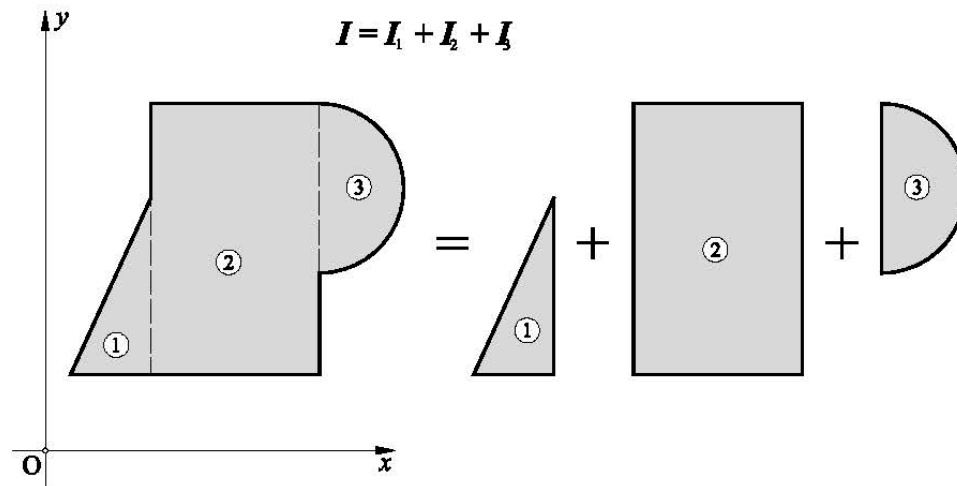
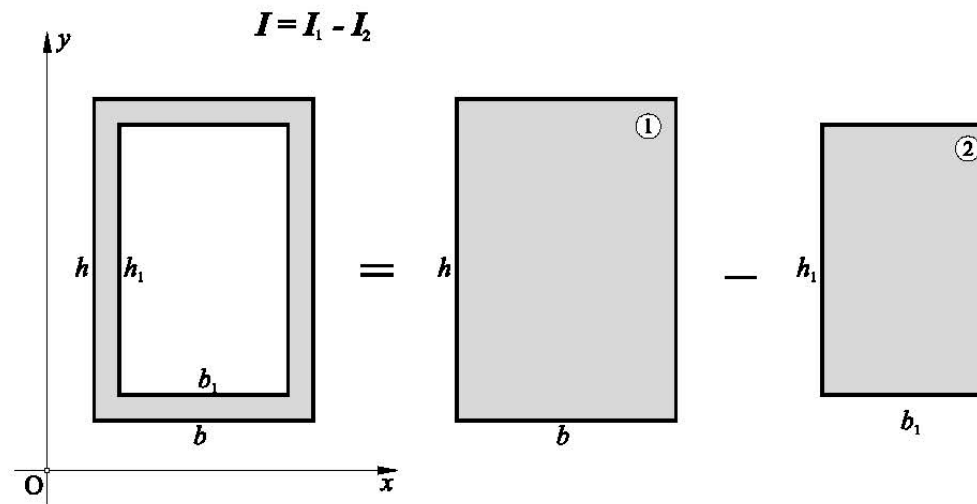
sa centrom u tački $C\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$ i

$$\text{poluprečnikom } r = \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

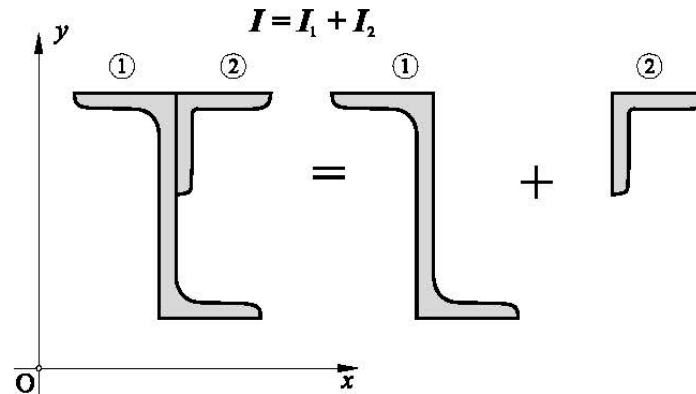
Ovaj krug naziva se *Mohr-ov krug inercije* i on predstavlja geometrijsko mjesto tačaka čije su koordinate I_{ξ} i $I_{\xi\eta}$ aksijalni i centrifugalni momenti inercije date površine za sve parove upravnih osa ξ i η kroz posmatranu tačku.



7. MOMENTI INERCIJE SLOŽENIH POVRŠINA



7. MOMENTI INERCIJE SLOŽENIH POVRŠINA



Postupaki proračuna je sljedeći:

1. Prvo se složena površina podijeli na najmanji mogući broj jednostavnih površina;
2. Zatim se izabere najpogodniji položaj koordinatnog sistema xy u odnosu na koji ćemo odrediti težište složene površine;
3. Za prethodno određene težišne ose sračunaju se momenti inercije koristeći Štajnerove obrasce;
4. Na osnovu sračunatih momenata inercije odredi se položaj glavne centralne ose (I);
5. Odrede se glavni centralni momenti inercije;
6. Konstruiše se *Mohr-ov* krug inercije.

7. MOMENTI INERCIJE SLOŽENIH POVRŠINA

Površina

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

Položaj težišta

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Momenti inercije u odnosu na težišne ose ξ i η

$$I_\xi = I_{\xi_1} + a_1^2 A_1 + I_{\xi_2} + a_2^2 A_2 + I_{\xi_3} + a_3^2 A_3$$

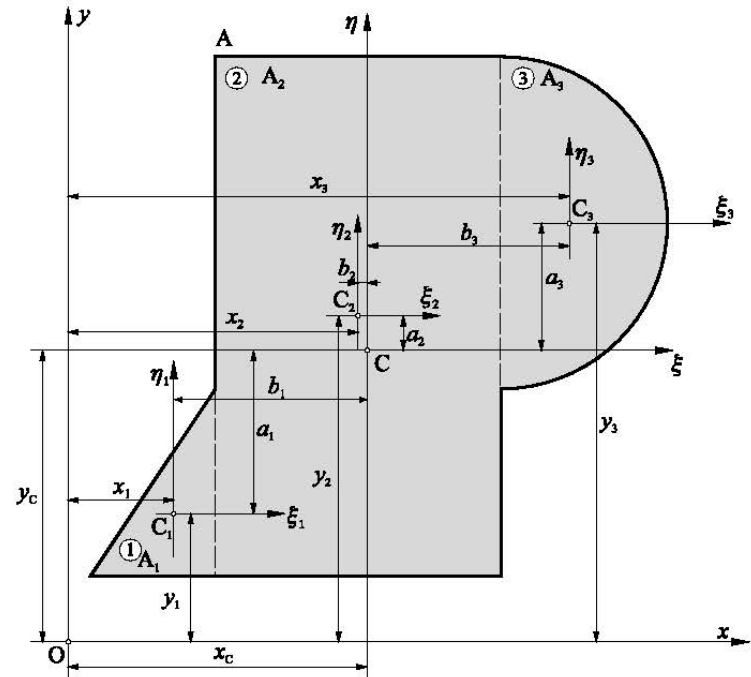
$$I_\eta = I_{\eta_1} + b_1^2 A_1 + I_{\eta_2} + b_2^2 A_2 + I_{\eta_3} + b_3^2 A_3$$

$$I_{\xi\eta} = I_{\xi_1\eta_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{\xi_2\eta_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{\xi_3\eta_3} + a_3 b_3 A_3$$

$$I_\xi = \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i} + a_i^2 A_i)$$

$$I_\eta = \sum_{i=1}^n (I_{\eta_i} + b_i^2 A_i)$$

$$I_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i\eta_i} + a_i b_i A_i)$$



Položaj glavne centralne osa inercije (I)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta}$$

Glavni centralni momenti inercije

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2}$$

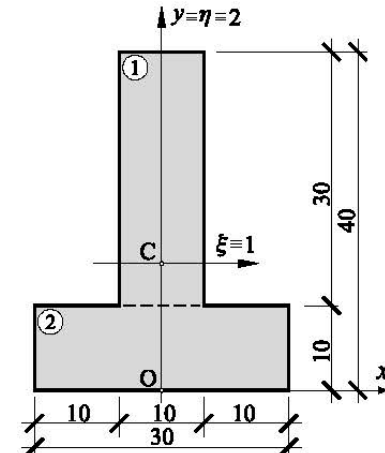
$$I_2 = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2}$$

8. RAČUNSKI PRIMJERI

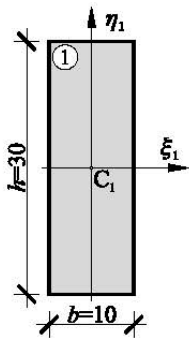
Primjer 3.

Za zadatau površinu odrediti glavne centralne ose i glavne centralne momente inercije.

Pošto je presjek simetričan, povučićemo y osu kao osu simetrije koja je ujedno i jedna glavna centralna osa, dok je druga glavna centralna osa normalna na y osu i prolazi kroz težište površine. Koordinate težišta površine ćemo odrediti u odnosu na koordinatni sistem xy . Površinu smo podjelili na dva pravougaonika.



Površina (1)



$$A_1 = b \cdot h = 300 \text{ cm}^2$$

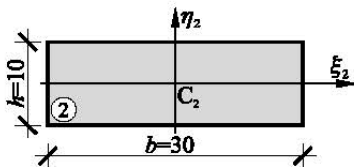
$$I_{\xi_1} = \frac{bh^3}{12} = 22500 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta_1} = \frac{hb^3}{12} = 2500 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi_1 \eta_1} = 0$$

$$y_1 = 25 \text{ cm}$$

Površina (2)



$$A_2 = b \cdot h = 300 \text{ cm}^2$$

$$I_{\xi_2} = \frac{bh^3}{12} = 2500 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta_2} = \frac{hb^3}{12} = 22500 \text{ cm}^4$$

$$y_2 = 5 \text{ cm}$$

Površina složene figure

$$A = A_1 + A_2 = 600 \text{ cm}$$

Koordinate težišta složene figure

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = 15 \text{ cm}$$

Glavni centralni momenti inercije

$$a_i = y_i - y_C; \quad a_1 = y_1 - y_C = 10 \text{ cm} \quad b_i = x_i - x_C$$

$$a_2 = y_2 - y_C = -10 \text{ cm} \quad b_1 = 0; \quad b_2 = 0$$

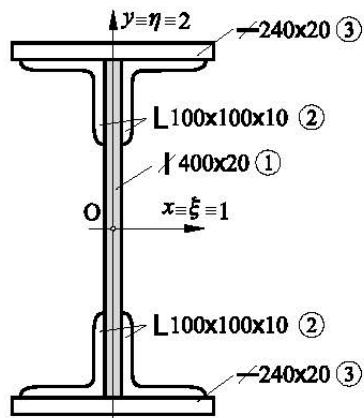
$$I_{\xi} = I_1 = I_{\xi_1} + a_1^2 A + I_{\xi_2} + a_2^2 A_2 = 85000 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = I_2 = I_{\eta_1} + I_{\eta_2} = 25000 \text{ cm}^4$$

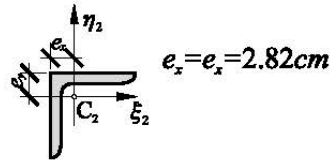
8. RAČUNSKI PRIMJERI

Primjer 4.

Za zadatu površinu koja je sastavljena od čeličnih elemenata odrediti glavne centralne ose inercije i glavne centralne momente inercije.



Slika 25.



$$A_2 = 19.20 \text{ cm}^2$$

$$I_{\xi_2} = I_{\eta_2} = 177 \text{ cm}^4$$

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 20 - 2.82 = 17.18 \text{ cm}$$

$$b_1 = 0; \quad b_2 = 1 + 2.82 = 3.82 \text{ cm}$$

$$a_3 = 20 + 1 = 21 \text{ cm}$$

$$b_3 = 0$$

Glavne ose inercije se podudaraju sa osama simetrije x i y . Presjek se sastoji od jednog vertikalnog lima (1) četiri “L” profila (2) i dvije lamele (3).

Površina presjeka

$$\begin{aligned} A &= A_1 + 4A_2 + 2A_3 = \\ &= 40 \cdot 2 + 4 \cdot 19.2 + 2 \cdot 24 \cdot 2 = \\ &= 252.8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Glavni centralni momenti inercije

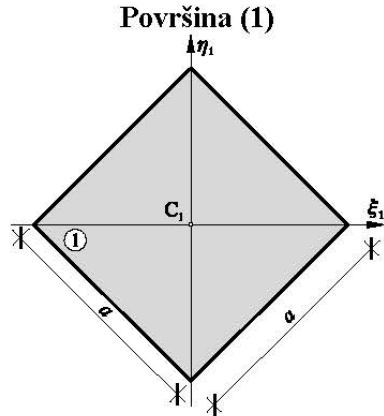
$$\begin{aligned} I_1 = I_{\xi} &= I_{\xi_1} + 4(I_{\xi_2} + a_2^2 A_2) + 2(I_{\xi_3} + a_3^2 A_3) = \frac{2 \cdot 40^3}{12} + 4(177 + 17.18^2 \cdot 19.2) + 2\left(\frac{24 \cdot 2^3}{12} + 21^2 \cdot 24 \cdot 2\right) = 10666.67 + 4(177 + 5666.93) + 2(16 + 21168) = \\ &= 10666.67 + 23375.72 + 42368.00 = 76410.39 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_2 = I_{\eta} = I_{\eta_1} + 4(I_{\eta_2} + b_2^2 A_2) + 2I_{\eta_3} = \frac{40 \cdot 2^3}{12} + 4(177 + 3.82^2 \cdot 19.2) + 2 \cdot \frac{2 \cdot 24^3}{12} = 26.67 + 1828.68 + 4608 = 6463.35 \text{ cm}^4$$

8. RAČUNSKI PRIMJERI

Primjer 5.

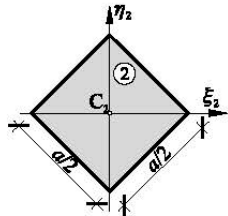
Za zadatu površinu odrediti glavne centralne ose inercije i glavne centralne momente inercije.



$$A_1 = a^2$$

$$I_{\xi_1} = I_{\eta_1} = \frac{a^4}{12}$$

Površina (2)



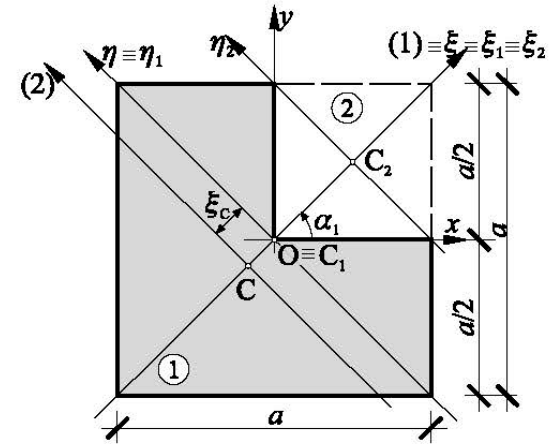
$$A_2 = \frac{a^2}{4}$$

$$I_{\xi_2} = I_{\eta_2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4}{12} = \frac{a^4}{192} \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

Momenti inercije

$$b_1 = \xi_1 - \xi_C = 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a\right) = \frac{\sqrt{2}}{12} a \quad b_2 = \xi_2 - \xi_C = \frac{\sqrt{2}}{4} a - \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} a\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

$$I_1 = I_{\xi_1} - I_{\xi_2} = \frac{a^4}{12} - \frac{a^4}{192} = \frac{15}{192} a^4 \quad I_2 = I_{\eta_1} + b_1^2 A_1 - [I_{\eta_2} + b_2^2 A_2] = \frac{a^4}{12} + \left(\frac{\sqrt{2}}{12} a\right)^2 a^2 - \left[\frac{a^4}{192} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{4}\right] = \frac{7}{192} a^4$$



Površina složene figure

$$A = A_1 - A_2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$$

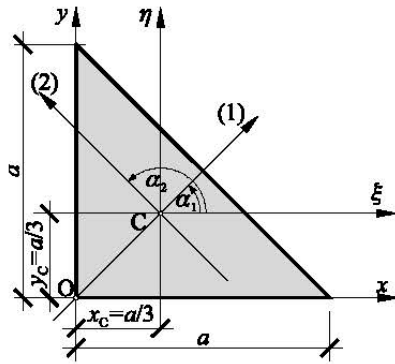
Položaj težišta

$$\xi_C = \frac{A_1 \xi_1 - A_2 \xi_2}{A_1 - A_2} = \frac{a^2 \cdot 0 - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} a}{\frac{3}{4} a^2} = -\frac{\sqrt{2}}{12} a$$

8. RAČUNSKI PRIMJERI

Primjer 6.

Za zadati ravnokraki trougao odrediti glavne centralne ose inercije i glavne centralne momente inercije.



$$\varphi = \alpha_1 = 45^\circ$$

$$\varphi = \alpha_2 = 135^\circ$$

$$I_\xi = I_\eta = \frac{a^4}{36}$$

$$I_{\xi\eta} = -\frac{a^4}{72}$$

Glavne centralne ose su zaokrenute za ugao od 45° u odnosu na težišne ose. Pošto za težišne ose imamo tablične momente inercije, glavne centralne momente je najlakše izračunati koristeći:

1. Izraze za rotaciju koordinatnog sistema ili
2. Izraze za proračun glavnih momenata inercije.

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right)\cos 90^\circ - \left(-\frac{a^4}{72}\right)\sin 90^\circ = \frac{a^4}{36} + 0 + \frac{a^4}{72} = \frac{a^4}{24}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi = \frac{a^4}{36} + 0 - \frac{a^4}{72} = \frac{a^4}{72}$$

$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right)\sin 90^\circ + \left(-\frac{a^4}{72}\right)\cos 90^\circ = 0 + 0 = 0$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right)^2 + 4\left(-\frac{a^4}{72}\right)^2} = \frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{72} = \frac{a^4}{24}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{72} = \frac{a^4}{72}$$

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- ANALIZA NAPONA -



Studijska 2022/2023 godina

ZADATAK OTPORNOSTI MATERIJALA

OSNOVNE HIPOTEZE

OSNOVNA HIPOTEZA OTPORNOSTI MATERIJALA

MATERIJAL IMA OSOBINE NEPREKIDNE SREDINE

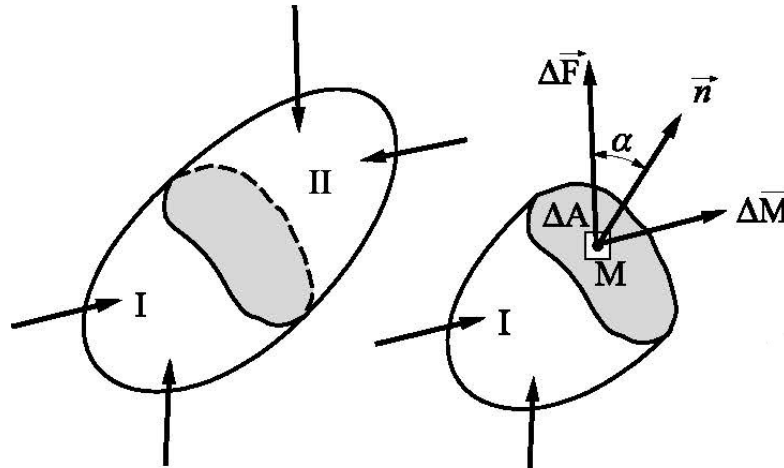
MATERIJAL JE HOMOGEN I IZOTROPAN

U TIJELU NEMA UNUTRAŠNJIH SILA PRIJE NANOŠENJA OPTEREĆENJA

KONAČNI REZULTAT DJELOVANJA SISTEMA SILA NA TIJELO JEDNAK JE SUMI REZULTATA DJELOVANJA POJEDINIH SILA NEZAVISNO OD PORETKA NJIHOVOG NANOŠENJA (PRINCIP SUPERPOZICIJE)

U TAČKAMA TIJELA DOVOLJNO UDALJENIM OD MJESTA DJELOVANJA OPTEREĆENJA UNUTRAŠNJE SILE VEOMA MALO ZAVISE OD NAČINA PRENOŠENJA OPTEREĆENJA NA TIJELO (SAINT-VENANTO-OV PRINCIP)

1. POJAM NAPONA I STANJE NAPONA



U okolini proizvoljne tačke izdvojimo jednu elementarnu površinu ΔA

Preko ove površine se prenose unutrašnje sile čija redukciona rezultanta na tačku M je $\Delta \vec{F}$ a redukcioni moment $\Delta \vec{M}$

Količnik $\Delta \vec{M} / \Delta A$ teži nuli, dok količnik $\Delta \vec{F} / \Delta A$ nazivamo **srednji napon na elementu površine** ΔA

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \text{ ukupni ili totalni napon u tački } M \text{ za presječnu ravan čija je normala } \vec{n}$$

1. POJAM NAPONA I STANJE NAPONA

$\sigma_n = p_n \cos \alpha$ - normalni napon

$\tau_n = p_n \sin \alpha$ - tangencijalni ili smičući napon

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nl} \vec{l} + \tau_{nm} \vec{m}$$

σ_n , τ_{nl} i τ_{nm} su pozitivni ako imaju smer jediničnih vektora \vec{n} , \vec{l} i \vec{m} .

Jedinica za napon je **Paskal (Pa)**.

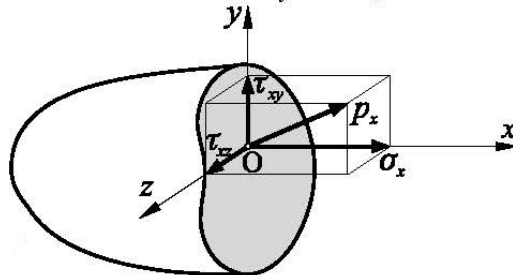
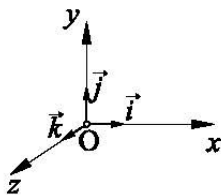
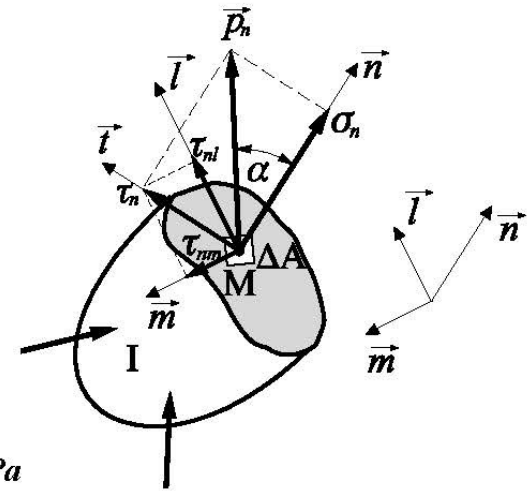
To je napon koji se dobije kada se sila od **1N** podjeli sa površinom **1m²**.

Obično se koristi **10⁶** (milion) puta veća jedinica **mega paskal** sa oznakom **MPa** (**1MN/m²**). Često se naponi iskazuju i u **N/mm²** jer je **1N/mm² = 1MN/m² = 1MPa**.

Koristi se i izvedena jedinica **1kN/cm² = 10⁻¹MPa ≈ 100 kg/cm²**

Red veličine: dopušteni napon za meki čelik je **16kN/cm²** odnosno **1600kg/cm²**

U Dekartovom koordinatnom sistemu $\vec{p}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$

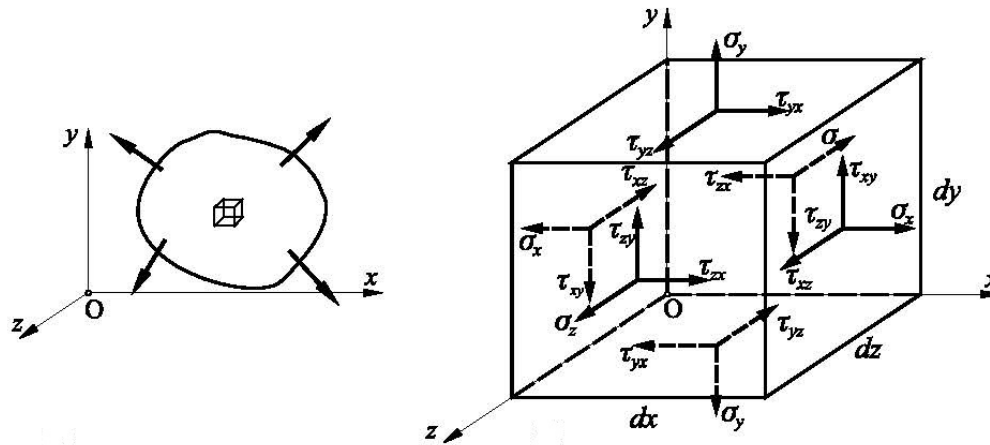


$$\vec{p}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{p}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{p}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}$$

2. KOMPONENTALNI NAPONI. TENZOR NAPONA



$\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$ i $\Sigma M_z = 0$ izolovani kvadar mora biti u ravnoteži

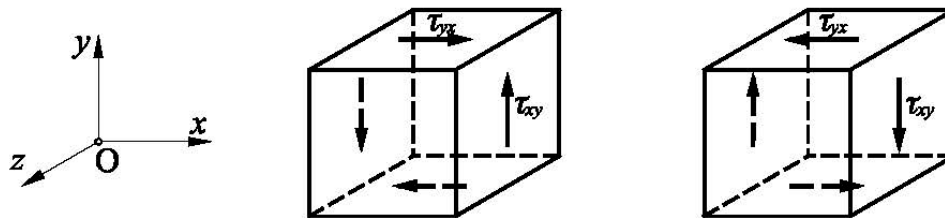
$$\Sigma M_z = (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Na sličan način mogu se napisati i preostala dva uslova ravnoteže $\Sigma M_x = 0$ i $\Sigma M_y = 0$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ i } \tau_{xz} = \tau_{zx} - \text{stav o konjugovanosti tangencijalnih napona}$$

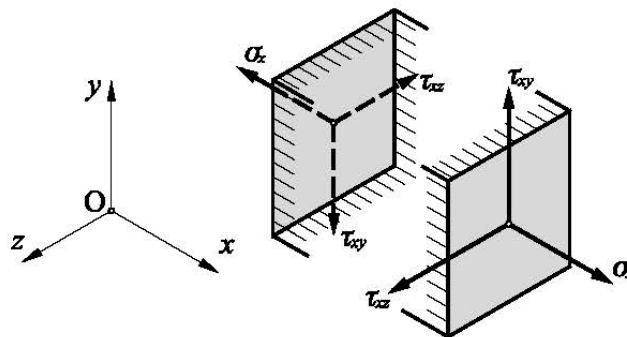
2. KOMPONENTALNI NAPONI. TENZOR NAPONA

U tački napregnutog tijela na dvije međusobno okomite (upravne) ravni djeluju numerički jednaki tangencijalni naponi



Od devet komponentalnih napona njih šest su međusobno nezavisni, i to tri normalna σ_x , σ_y i σ_z i tri tangencijalna $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ i $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

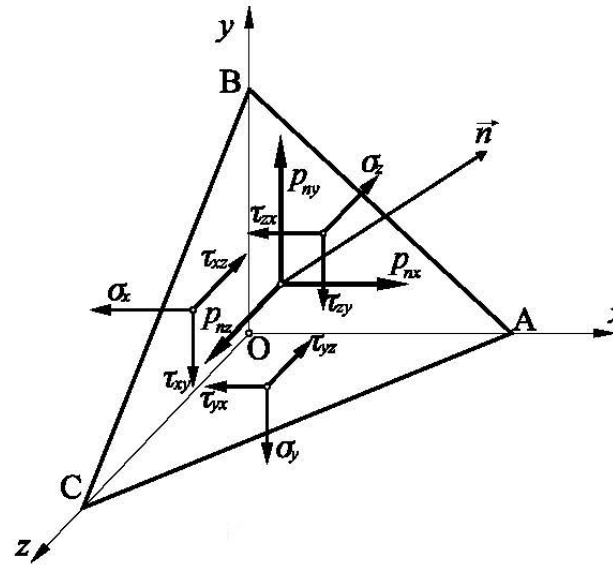
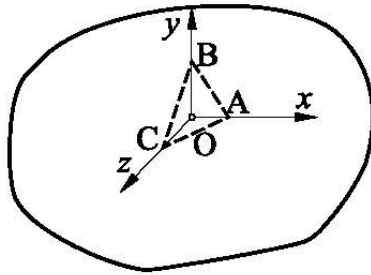
Konvencija o znaku komponentalnih napona σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} i τ_{zx}



2. KOMPONENTALNI NAPONI. TENZOR NAPONA

Poznati komponentalni naponi $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ i τ_{zx}

Treba odrediti vektor totalnog napona \vec{p}_n , normalni σ_n i tangencijalni τ_{nl} napon za ravan čija normala \vec{n} sa koordinatnim osama x, y i z gradi uglove α, β i γ , odnosno $\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$



dA površina kose ravni ABC, površina OBC = $dA \cos \alpha$, površina OAC = $dA \cos \beta$ i površina OAB = $dA \cos \gamma$

$$\vec{p}_n = p_{nx} \cdot \vec{i} + p_{ny} \cdot \vec{j} + p_{nz} \cdot \vec{k}$$

Iz uslova ravnoteže $\Sigma \mathbf{X} = \mathbf{0}$ slijedi:

$$p_{nx} dA = \sigma_x dA \cos \alpha + \tau_{yx} dA \cos \beta + \tau_{zx} dA \cos \gamma \quad | \quad dA$$

2. KOMPONENTALNI NAPONI. TENZOR NAPONA

$$p_{nx} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$$

Anlogne izraze dobićemo iz preostala dva uslova ravnoteže sila $\Sigma Y = 0$ i $\Sigma Z = 0$

$$p_{nx} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma \quad \text{Cauchy-eve jednačine}$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$$

Normalni napon σ_n možemo dobiti kao skalarni proizvod vektora ukupnog napona i orta normale \vec{n}

$$\sigma_n = \vec{p}_n \cdot \vec{n} = (p_{nx} \cdot \vec{i} + p_{ny} \cdot \vec{j} + p_{nz} \cdot \vec{k}) \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}) = p_{nx} \cos \alpha + p_{ny} \cos \beta + p_{nz} \cos \gamma$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2(\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha)$$

Da bi odredili komponentalni tangencijalni τ_{nl} napon moramo mu definisati smjer. Ako za smjer usvojimo ort $\vec{l}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ onda tangencijalni napon možemo odrediti množeći vektor totalnog napona \vec{p}_n skalarno sa ortom

$$\vec{l} = \cos \alpha_1 \cdot \vec{i} + \cos \beta_1 \cdot \vec{j} + \cos \gamma_1 \cdot \vec{k}$$

$$\tau_{nl} = \vec{p}_n \cdot \vec{l} = (p_{nx} \cdot \vec{i} + p_{ny} \cdot \vec{j} + p_{nz} \cdot \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \vec{i} + \cos \beta_1 \cdot \vec{j} + \cos \gamma_1 \cdot \vec{k}) = p_{nx} \cos \alpha_1 + p_{ny} \cos \beta_1 + p_{nz} \cos \gamma_1$$

$$\begin{aligned} \tau_{nl} = & \sigma_x \cos \alpha \cos \alpha_1 + \sigma_y \cos \beta \cos \beta_1 + \sigma_z \cos \gamma \cos \gamma_1 + \tau_{xy} (\cos \alpha \cos \beta_1 + \cos \beta \cos \alpha_1) + \\ & + \tau_{yz} (\cos \beta \cos \gamma_1 + \cos \gamma \cos \beta_1) + \tau_{zx} (\cos \gamma \cos \alpha_1 + \cos \alpha \cos \gamma_1) \end{aligned}$$

Na osnovu prethodno pokazanog vidimo da ako nam je poznato devet komponentalnih napona, tri normalna $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i šest tangencijalnih $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ za tri međusobno upravne ravni, stanje napona u tački potpuno je određeno

2. KOMPONENTALNI NAPONI. TENZOR NAPONA

Šest nezavisnih komponentalnih napona u proizvoljno odabranom koordinatnom sistemu u potpunosti određuju stanje napona u posmatranoj tački napregnutog tijela

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \text{tenzor napona}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \text{prostorno stanje napona}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{ravno stanje napona (xy)}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \text{linearno (linijsko) stanje napona}$$

Pod analizom napona u tački podrazumjeva se određivanje promjene napona u zavisnosti od položaja presjeka kroz tačku, veličine ekstremnih normalnih i tangencijalnih napona kao i definisanja ravni u kojima ti ekstermumi djeluju, ako su poznati komponentalni naponi

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

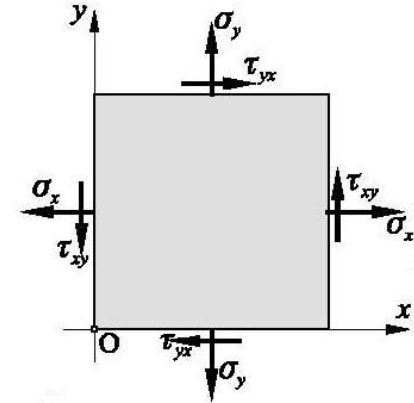
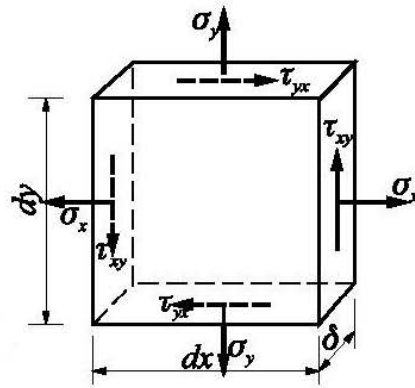
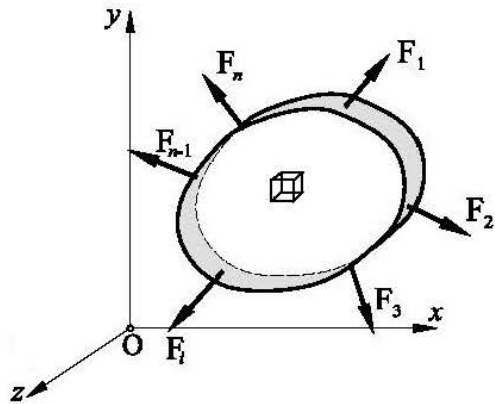
- ANALIZA NAPONA -

- RAVNO I LINIJSKO STANJE NAPONA -



Studijska 2022/2023 godina

1. RAVNO STANJE NAPONA – Komponentalni naponi

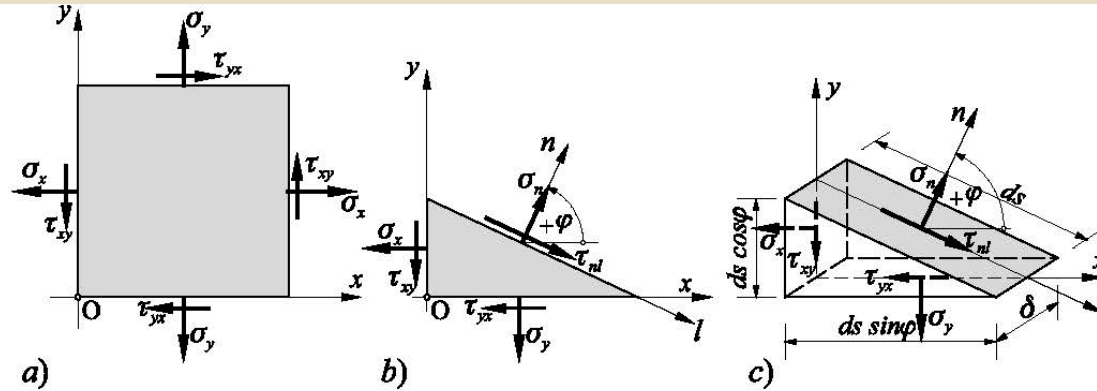


$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Tenzor ravnog stanja napona

1. RAVNO STANJE NAPONA – Naponi u kosoj ravni



Orijentacija ose l određuje smjer pozitivnog tangencijalnog napona τ_{nl}

$$\Sigma n = 0 \rightarrow \sigma_n \delta ds - \sigma_x \delta ds \cos^2 \varphi - \sigma_y \delta ds \sin^2 \varphi - \tau_{xy} \delta ds \cos \varphi \sin \varphi - \tau_{yx} \delta ds \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad / \delta ds \quad (\tau_{xy} = \tau_{yx})$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\Sigma l = 0 \rightarrow \tau_{nl} \delta ds - \sigma_x \delta ds \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_y \delta ds \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \delta ds \cos^2 \varphi - \tau_{yx} \delta ds \sin^2 \varphi = 0 \quad / \delta ds \quad (\tau_{xy} = \tau_{yx})$$

$$\tau_{nl} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi - \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Ako iskoristimo sljedeće trigonometrijske veze

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi); \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi); \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{nl} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

1. RAVNO STANJE NAPONA – Glavni normalni naponi i glavne ose

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

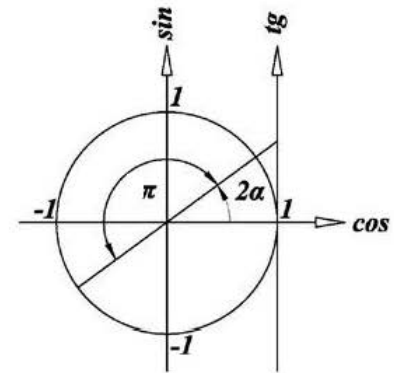
$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + 2\tau_{xy}\cos 2\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) + n\pi \quad n=0,1,2,\dots \quad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) + \frac{n\pi}{2} \quad n=0,1$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad - \text{maksimalni normalni napon}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad - \text{minimalni normalni napon}$$

$$\sigma_{max,min} = \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

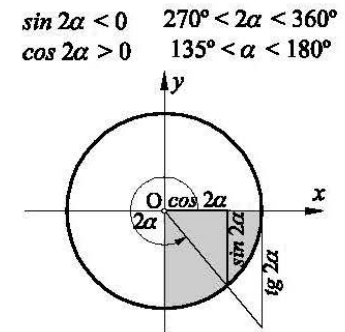
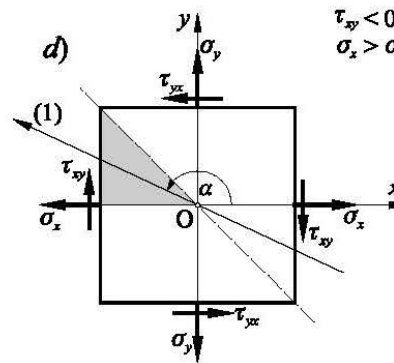
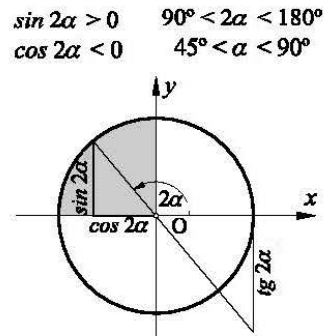
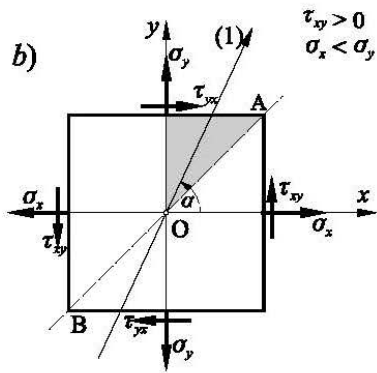
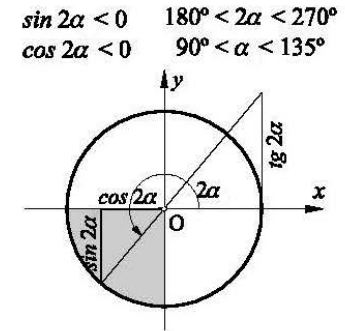
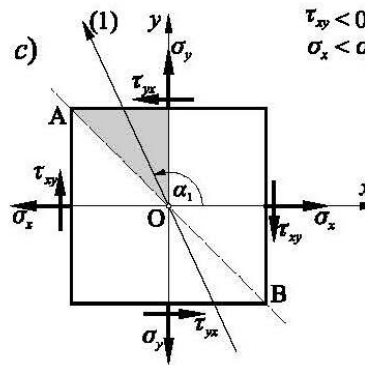
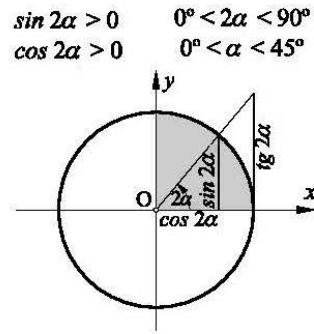
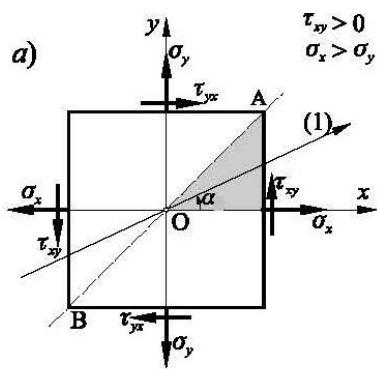


Naponi σ_1 i σ_2 predstavljaju ekstremne vrijednosti normalnih napona i nazivaju se **glavni normalni naponi** u datoj tački, a ravni u kojima oni djeluju nazivaju se **glavne ravni**. Pravci koji se poklapaju sa pravcima glavnih napona nazivaju se **pravci glavnih napona**, dok se sistem odgovarajućih koordinatnih osa naziva **glavnim osama**.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \rightarrow \quad \tau_{n1} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi - \tau_{xy}\cos 2\varphi \quad \rightarrow \quad \tau_{12} = 0$$

U ravnima u kojima djeluju glavni normalni naponi tangencijalni naponi su jednaki nuli

1. RAVNO STANJE NAPONA – Glavni normalni naponi i glavne ose



Glavna osa (1) se nalazi između dijagonale smicanja i pravca algebarski većeg komponentalnog normalnog napona

<p>– za $(\sigma_x - \sigma_y) > 0$ odnosno $\sigma_x > \sigma_y \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$</p> <p>– za $(\sigma_x - \sigma_y) < 0$ odnosno $\sigma_x < \sigma_y \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) + 90^\circ$</p>
--

1. RAVNO STANJE NAPONA – Ekstremni smičući naponi

$$\tau_{nl} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\frac{d\tau_{nl}}{d\varphi} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0 \rightarrow \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \rightarrow \operatorname{tg} 2\bar{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \rightarrow \bar{\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$

$$\operatorname{tg} 2\bar{\alpha} \rightarrow \tau_{nl} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \rightarrow \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - \text{ekstremni tangencijalni napon}$$

Ekstremni tangencijalni napon određen preko glavnih normalnih napona

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\operatorname{tg} 2\bar{\alpha} \rightarrow \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \rightarrow \sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

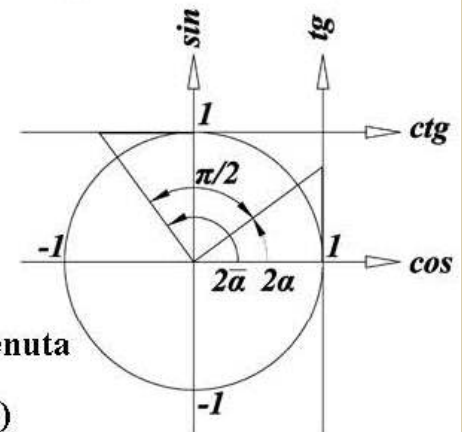
Odgovarajući (ili srednji) normalni napon određen preko glavnih normalnih napona

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \quad -\operatorname{ctg} 2\bar{\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{1}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 2\bar{\alpha}$ uslov ortogonalnosti pravaca određenih uglovima 2α i $2\bar{\alpha}$

$2\bar{\alpha} = 2\alpha + \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{\alpha} = \alpha + \frac{\pi}{4} \rightarrow$ Ravan ekstremnih tangencijalnih napona zaokrenuta je za ugao $\pi/4$ (45°) u odnosu na ravan glavnog normalnih napona (1)



1. RAVNO STANJE NAPONA – Normalni naponi u upravnim ravnima

Posmatramo 2 upravne ravni

Prva ravan sa normalom n koja gradi ugao φ sa horizontalnom osom

Druga ravan sa normalom n' koja gradi ugao φ' sa horizontalnom osom ($\varphi' = \varphi + \pi/2$)

$$\cos 2\varphi' = \cos 2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\varphi + \pi) = -\cos 2\varphi$$

$$\sin 2\varphi' = \sin 2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\varphi + \pi) = -\sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

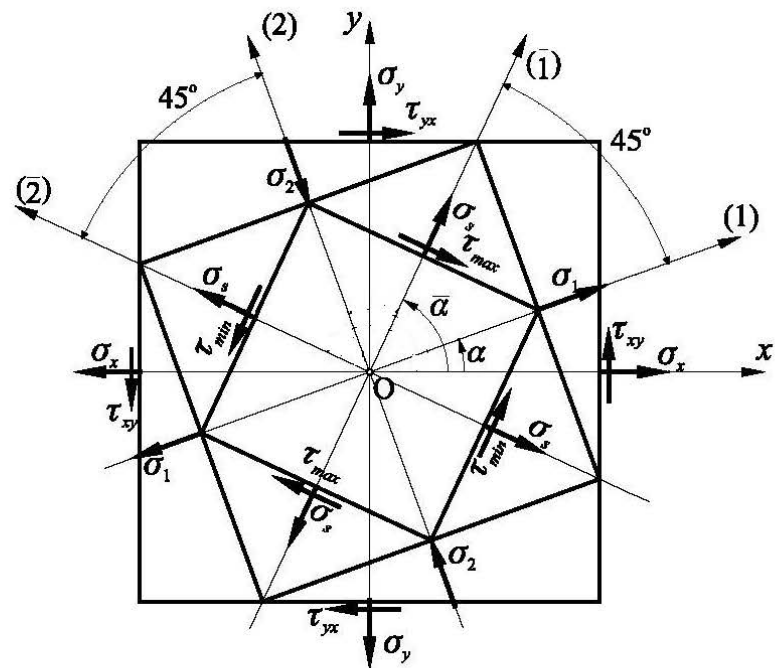
$$\begin{aligned}\sigma_{n'} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi' + \tau_{xy}\sin 2\varphi' = + \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi\end{aligned}$$

$$\sigma_n + \sigma_{n'} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\boxed{\sigma_x + \sigma_y = \sigma_n + \sigma_{n'} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}}$$

Zbir normalnih napona za bilo koje dvije međusobno upravne ravni kroz jednu tačku je konstantna veličina, odnosno invarijantna veličina.

Grafički prikaz ravni i pravaca glavnih normalnih i eksternih tangencijalnih napona



1. RAVNO STANJE NAPONA – Mohr-ov krug napona

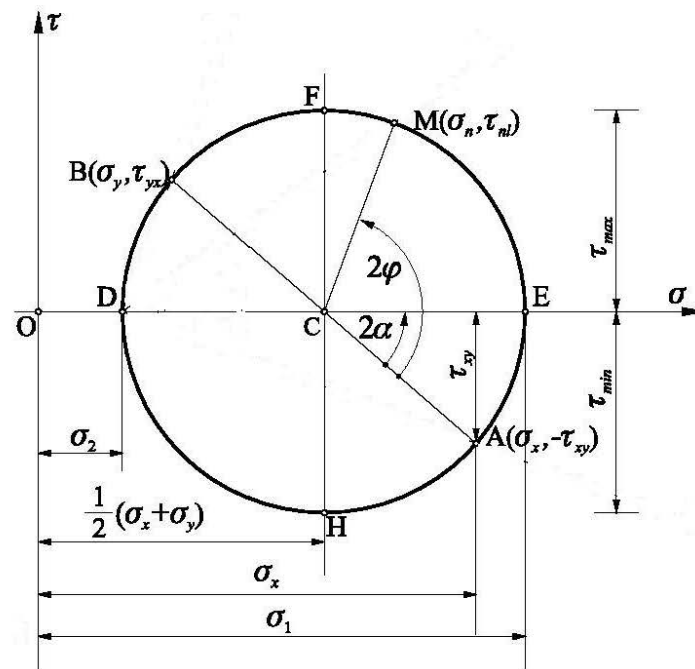
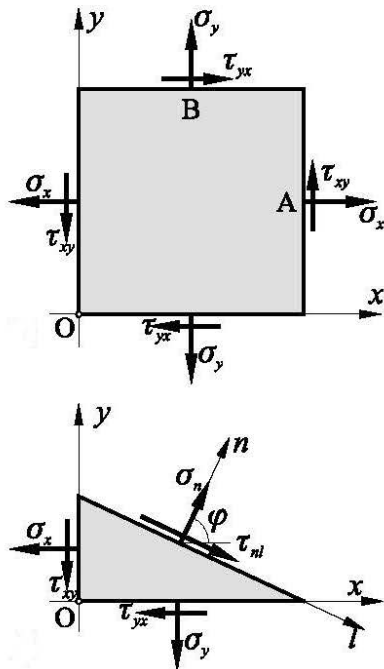
$$\left. \begin{aligned} \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{nl} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right| ^2 +$$

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau_{nl}^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2$$

$$a = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad b^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2$$

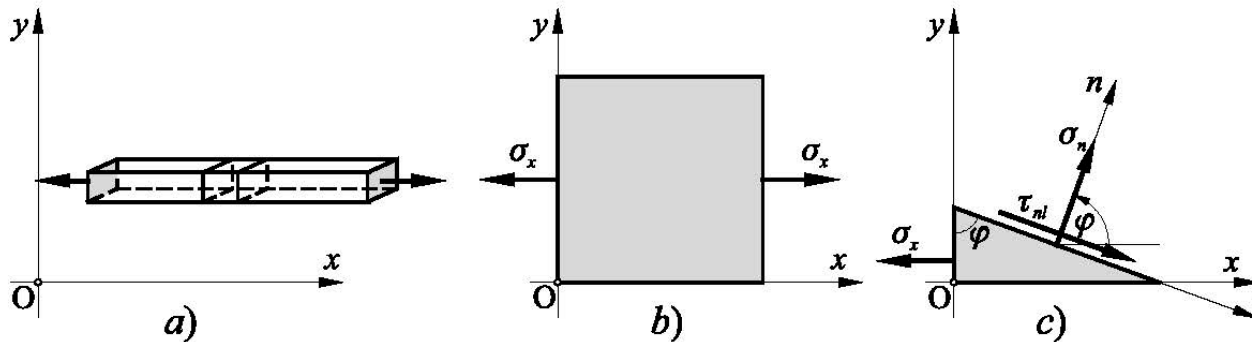
$$(\sigma_n - a)^2 + \tau_{nl}^2 = b^2$$

Mohr-ov krug napona je geometrijsko mjesto tačaka čije koordinate (σ_n, τ_{nl}) definišu napone za sve moguće pravce n kroz posmatranu tačku.



2. LINIJSKO STANJE NAPONA

Komponentalni naponi



Za ovu analizu mogu se koristiti svi izrazi koji su izvedeni za ravno stanje napona, u koje treba uvrstiti $\sigma_y = 0$ i $\tau_{xy} = 0$.

Naponi u kosoj ravni: $\sigma_n = \frac{1}{2}\sigma_x(1 + \cos 2\varphi)$; $\tau_{nl} = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi$

Glavni normalni naponi: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0$

– za $\sigma_x > 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(0) = 0$; $\sigma_1 = \sigma_x$ $\sigma_2 = 0$

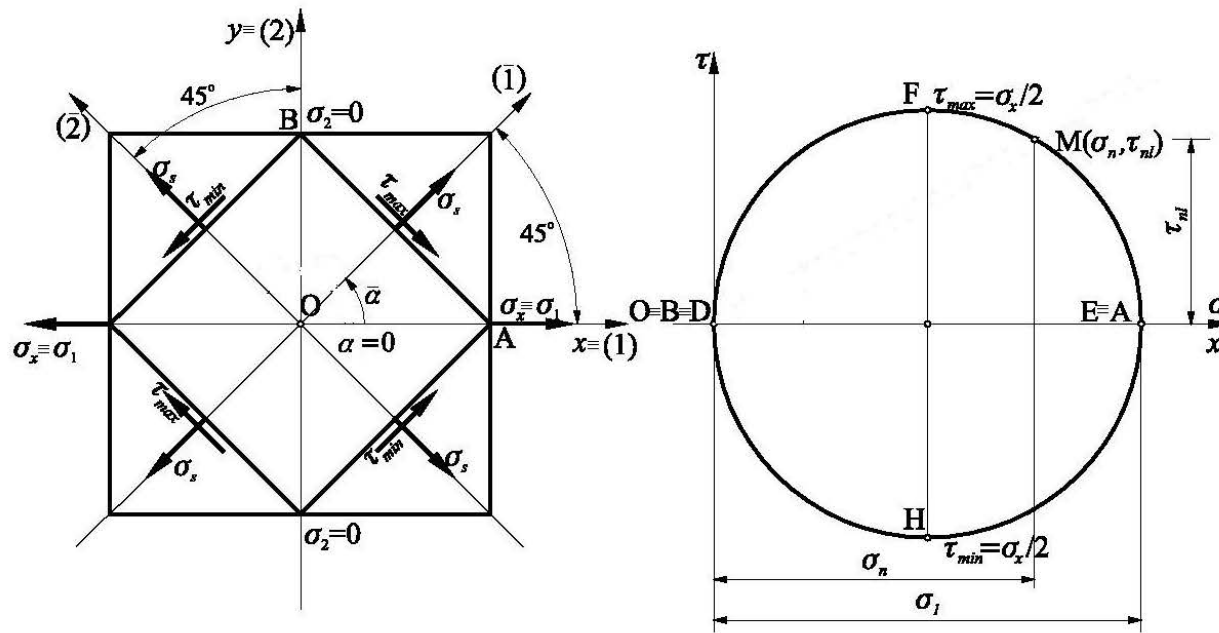
– za $\sigma_x < 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(0) + 90^\circ = 90^\circ$; $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = \sigma_x$

2. LINIJSKO STANJE NAPONA

Ekstremni tangencijalni naponi:
$$\operatorname{tg} 2\bar{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{\sigma_x}{0} = -\infty$$

$$\bar{\alpha} = \alpha + 45^\circ \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_x \quad \sigma_s = \frac{\sigma_x}{2}$$

Mohr-ov krug napona:



UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- ANALIZA NAPONA -

- PROSTORNO STANJE NAPONA -



Studijska 2022/2023 godina

1. GLAVNI NAPONI I INVARIJANTE STANJA NAPONA

Pri analizi ovog naponskog stanja primjenićemo analogiju sa ravnim stanjem napona.

Normalni napon dostiže ekstremnu vrijednost u ravni u kojoj je napon smicanja jednak nuli. Postoje 3 takve ravni.

$$\vec{p}_n = p_{nx} \cdot \vec{i} + p_{ny} \cdot \vec{j} + p_{nz} \cdot \vec{k} = \{p_{nx}; p_{ny}; p_{nz}\}$$

$$p_{nx} = \sigma_x \cos \alpha_n + \tau_{yx} \cos \beta_n + \tau_{zx} \cos \gamma_n$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha_n + \sigma_y \cos \beta_n + \tau_{zy} \cos \gamma_n \quad \text{Cauchy-jeve jednačine} \quad (1)$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cos \alpha_n + \tau_{yz} \cos \beta_n + \sigma_z \cos \gamma_n$$

U ravnima glavnih normalnih napona ukupni naponi djeluju u pravcu normale na tu ravan ($\vec{p}_i = \vec{\sigma}_i$).

α_i, β_i i γ_i ($i = 1, 2, 3$) su uglovi koje normale na ravni glavnih napona zaklapaju sa koordinatnim osama.

$$p_{ix} = \sigma_i \cos \alpha_i \quad (\sigma_x - \sigma_i) \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cos \beta_i + \tau_{xz} \cos \gamma_i = 0$$

$$p_{iy} = \sigma_i \cos \beta_i \quad (2); \quad (1) - (2) \rightarrow \tau_{yx} \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i) \cos \beta_i + \tau_{yz} \cos \gamma_i = 0 \rightarrow \mathbf{4 \text{ nepoznate: } \cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i \text{ i } \sigma_i}$$

$$p_{iz} = \sigma_i \cos \gamma_i \quad \tau_{zx} \cos \alpha_i + \tau_{zy} \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_i) \cos \gamma_i = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_i) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_i) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_i^3 - I_\sigma \sigma_i^2 + II_\sigma \sigma_i - III_\sigma = 0$$

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ II_\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ III_\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

prva, druga i treća invarijanta stanja napona

1. GLAVNI NAPONI I INVARIJANTE STANJA NAPONA

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cos \beta_i + \tau_{xz} \cos \gamma_i = 0$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i) \cos \beta_i + \tau_{yz} \cos \gamma_i = 0$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha_i + \tau_{zy} \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_i) \cos \gamma_i = 0$$

Rješenja homogenog linearnog sistema jednačina ne mogu se dobiti eksplicitno već samo u vidu proporcije:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ (\sigma_y - \sigma_i) \tau_{yz} \\ \tau_{zy} (\sigma_z - \sigma_i) \end{pmatrix}}_{A_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \tau_{yx} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} (\sigma_z - \sigma_i) \end{pmatrix}}_{B_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \tau_{yx} (\sigma_y - \sigma_i) \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \end{pmatrix}}_{C_i} = k$$

Dopunski uslov za određivanje k je poznata relacija $\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \pm \frac{A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \\ \cos \beta_i &= \pm \frac{B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \\ \cos \gamma_i &= \pm \frac{C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}} \end{aligned}}$$

kosinusi pravaca glavnih napona σ_i ($i = 1, 2, 3$)

Fizičko značenje prve invarijante stanja napona ($I_\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$): **u jednoj tački napregnutnog tijela zbir normalnih napona za bilo koje tri međusobno upravne ravni je konstantna veličina**

1. GLAVNI NAPONI I INVARIJANTE STANJA NAPONA

Ako kao ose Dekartovog koordinatnog sistema usvojimo ose glavnih napona σ_1 , σ_2 i σ_3 dobija se:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad - \text{ Tenzor prostornog stanja napona}$$

$$I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$II_\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad - \text{ Invarijante napona}$$

$$III_\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$p_{n1} = \sigma_1 \cos \alpha$$

$$p_{n2} = \sigma_2 \cos \beta \quad - \text{ Cauchy-eve jednačine } (\vec{p}_n = p_{n1} \cdot \vec{i} + p_{n2} \cdot \vec{j} + p_{n3} \cdot \vec{k} = \{p_{n1}; p_{n2}; p_{n3}\})$$

$$p_{n3} = \sigma_3 \cos \gamma$$

$$p_n^2 = p_{n1}^2 + p_{n2}^2 + p_{n3}^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma \quad - \text{ Intenzitet totalnog napona}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma$$

$$\tau_{nl} = \sigma_1 \cos \alpha \cos \alpha_1 + \sigma_2 \cos \beta \cos \beta_1 + \sigma_3 \cos \gamma \cos \gamma_1$$

- Normalni i tangencijalni napon

2. MOHR-OVI KRUGOVI ZA PROSTORNO STANJE NAPONA

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad \rightarrow$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

Pošto su kvadrati kosinusa uglova α , β , i γ pozitivni a $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \rightarrow \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0$

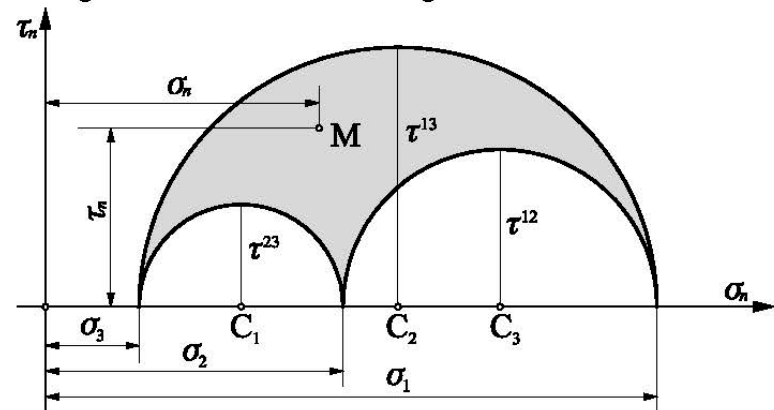
$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

Kada ove tri jednačine izjednačimo sa nulom i interpretiramo ih grafički dobićemo tri kruga

$$C_1 \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right] \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$C_2 \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0 \right] \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$C_3 \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right] \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



$$\tau^{31} = \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad - \quad \text{Ekstremni tangencijalni napon}$$

3. SFERNI I DEVIJATORSKI DIO TENZORA NAPONA

$$\sigma_s = \frac{1}{3} I_\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{Uvedemo pojam srednjeg normalnog napona}$$

Svaki tenzor napona (S) možemo razložiti na dva dijela kako slijedi

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_s) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_s) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} = S'' + S'$$

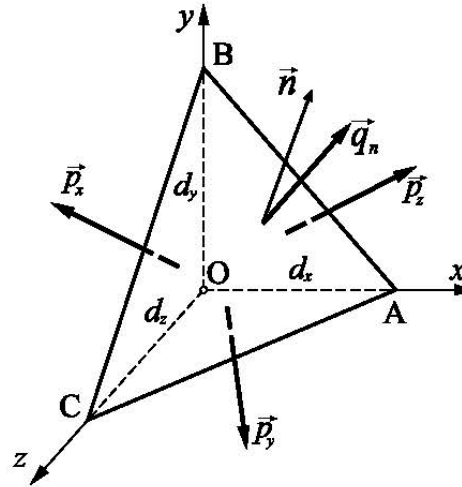
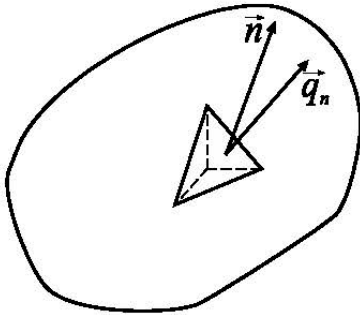
$$S' = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \quad - \quad \text{Sferni dio tenzora napona (hidrostatički pritisak)}$$

$$S'' = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{bmatrix} \quad - \quad \text{Devijatorski dio tenzora napona } (I_\sigma = 0 - \text{čisto smicanje})$$

Prema tome svako naponsko stanje možemo prikazati kao zbir **hidrostatičkog pritiska** i **čistog smicanja**

Kasnije ćemo pokazati da **sferni dio tenzora napona utiče na promjenu zapremine** a **devijatorski na promjenu oblika tijela**

4. VEZE IZMEĐU NAPONA I POVRŠINSKIH SILA (POVRŠINSKI USLOVI)



$$\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$$

$$\vec{q}_n = q_{nx} \cdot \vec{i} + q_{ny} \cdot \vec{j} + q_{nz} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p}_x = \sigma_x \cdot \vec{i} + \tau_{xy} \cdot \vec{j} + \tau_{xz} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p}_y = \tau_{yx} \cdot \vec{i} + \sigma_y \cdot \vec{j} + \tau_{yz} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p}_z = \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j} + \sigma_z \cdot \vec{k}$$

dA površina spoljne ravni tetraedra **ABC** → ostale tri ravni imaju površine $dA \cos \alpha$, $dA \cos \beta$ i $dA \cos \gamma$

Tijelo je u ravnoteži → Tetraeder je u ravnoteži → Glavni vektor spoljašnjih sila = zbiru vektora unutrašnjih sila:

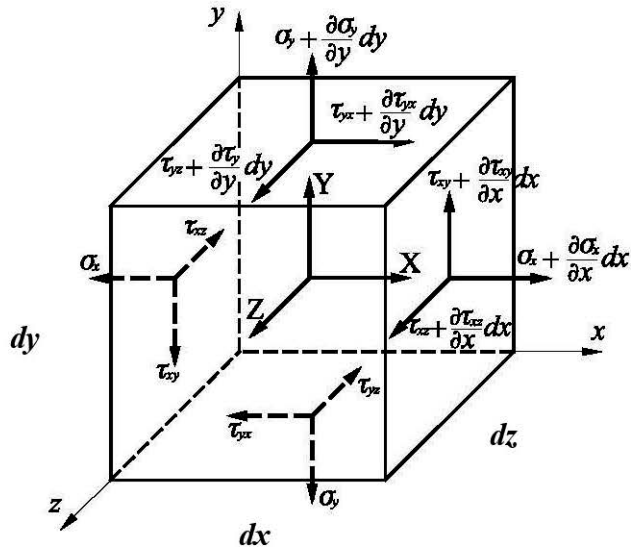
$$\vec{q}_n dA = \vec{p}_x dA \cos \alpha + \vec{p}_y dA \cos \beta + \vec{p}_z dA \cos \gamma \quad / \quad dA$$

$$\vec{q}_n = \vec{p}_x \cos \alpha + \vec{p}_y \cos \beta + \vec{p}_z \cos \gamma$$

$q_{nx} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$ $q_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma$ $q_{nz} = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$
--

- površinski ili granični uslovi za napone

5. VEZE IZMEĐU NAPONA I ZAPREMINSKIH SILA (DIFERENCIJALNE JEDNAČINE RAVNOTEŽE)



Komponente zapreminskih sila u pravcu koordinatnih osa su X, Y i Z

Naponi i zapreminske sile koji djeluju na element moraju zadovoljiti uslove ravnoteže sila. Uslovi ravnoteže momenta su zadovoljeni stavom o konjugovanosti tangencijalnih napona. Na osnovu preostala tri uslova dobijamo:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dz dy + X dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Analogno na osnovu dva preostala uslova ravnoteže sila ($\Sigma Y=0$ i $\Sigma Z=0$) dobijaju se dodatne dvije jednačine pa se konačno dobija sistem od tri diferencijalne jednačine odnosno **Diferencijalne jednačine ravnoteže ili Navier-ove jednačine**

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$
$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$
$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- ANALIZA DEFORMACIJE -

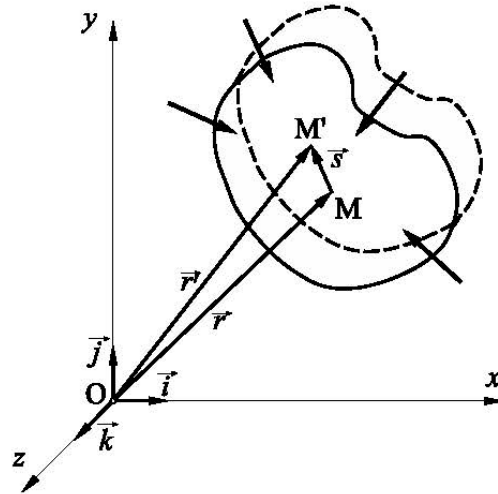


Studijska 2022/2023 godina

1. POJAM DEFORMACIJE

Pomjeranja koja su rezultat promjene oblika i dimenzija tijela nazivamo **deformacijom tijela**.

Tijelo koje se pod uticajem spoljašnjih sila deformiše naziva se **čvrsto deformabilno tijelo**.



\vec{r} - vektor položaja tačke M u odnosu na koordinatni početak prije nanošenja opterećenja

$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{s}$ vektor položaja tačke M u odnosu na koordinatni početak nakon nanošenja opterećenja

$\overrightarrow{MM'} = \vec{s}$ vektor pomjeranja tačke; $\vec{s} = \vec{s}(x, y, z)$; $\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ (u , v i w nazivamo **komponentalna pomjeranja**)

U daljoj analizi ćemo se ograničiti na slučaj kada su pomjeranja pojedinih tačaka veoma mala u odnosu na dimenzije tijela. Ova pretpostavka je poznata kao pretpostavka o **infinitesimalnim** ili **malim deformacijama**.

Pošto su pomjeranja i njihovi izvodi veoma mali u daljim razmatranjima možemo usvojiti da se njihovi proizvodi i stepeni mogu zanemariti u odnosu na same veličine.

Važi princip superpozicije.

2. STANJE DEF. U OKOLINI TAČKE. KOMPONENTE DEF.

Prethodno smo deformacije tijela izrazili preko pomjeranja. Međutim, deformacija tijela se mogu izraziti i drugim veličinama koje karakterišu promjenu oblika i zapremine tijela. Ove veličine su **dilatacije** i **klizanja**.

$\overline{ML} = n$ - dužina posmatranog vlakna prije deformacije

$\overline{M'L'} = n'$ - dužina posmatranog vlakna nakon deformacije

$\Delta n = n' - n$ - ukupno izduženje posmatranog vlakna

$\Delta n/n$ - srednje izduženje duži u okolini tačke **M** u pravcu \vec{n}

$$\varepsilon_{ML} = \frac{\overline{M'L'} - \overline{ML}}{\overline{ML}} - \text{srednje izduženje u pravcu } \vec{n} \text{ u tački } M$$

$\gamma_{nl} = \angle LMN - \angle L'M'N'$ - srednja promjena ugla između pravaca \vec{n} i \vec{l} u tački **M**

$\varepsilon_{MN} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{n}$ - granična vrijednost $\Delta n/n$ specifičnog izduženje ili linearna dilatacija u tački **M** u pravcu \vec{n} (**dilatacija**)

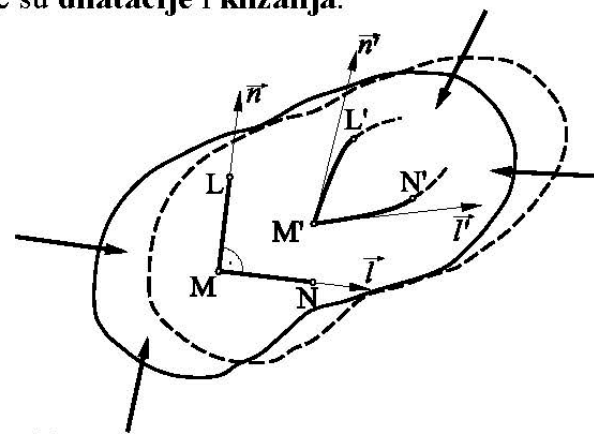
$\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, y, z)$ dilatacija je različita za razne pravce kroz istu tačku kao i za različite tačke opterećenog tijela

Dilatacija je bezdimenzionalna veličina. Dilatacija je pozitivna ako se dužina nakon deformacije povećava.

$\gamma_{nl} = \lim_{N, L \rightarrow M} \left(\frac{\pi}{2} - \angle L'M'N' \right)$ - granična vrijednost promjene prvobitnog pravog ugla $\sphericalangle LMN$, **ugao smicanja** ili **klizanje**

Prema konvenciji klizanje je pozitivno, ako se prvobitni pravi ugao nakon deformacije smanjuje.

Dilatacija i klizanje jednim imenom se nazivaju **komponente deformacije**.



3. VEZE IZMEĐU KOMPONENTALNIH POMJERANJA I KOMPONENTALNIH DEFORMACIJA. TENZOR DEF.

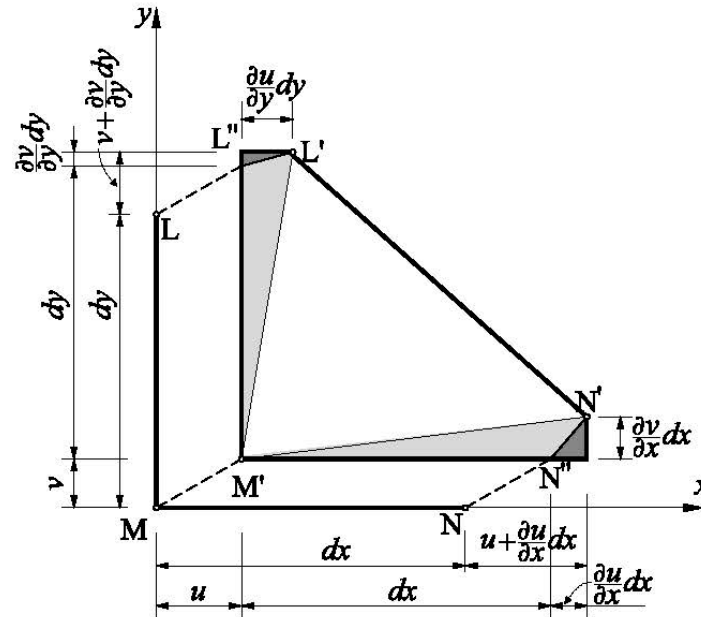
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Analogno se dobijaju izrazi i za dilatacije ε_y i ε_z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



Analogno i za druge dvije ravni yz i zx dobijaju se uglovi klizanja γ_{yz} i γ_{zx}

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

3. VEZE IZMEĐU KOMPONENTALNIH POMJERANJA I KOMPONENTALNIH DEFORMACIJA. TENZOR DEF.

Tri dilatacije ϵ_x , ϵ_y i ϵ_z i tri klizanja γ_{xy} , γ_{yz} i γ_{zx} nazivamo komponente deformacije.

Navedenih šest komponenti deformacije u potpunosti određuju deformaciju elementarnog kvadra u uslovima malih odnosno infinitezimalnih deformacija.

Na osnovu analogije sa naponima, na bazi poznatih dilatacija i klizanja za tri međusobno upravna pravca kroz posmatranu tačku možemo napisati izraze za dilatacije i klizanje za ma koje druge pravce kroz tu tačku.

Dilatacija i klizanje za pravce definisane uglovima u odnosu na koordinatne ose $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ i $\vec{l}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$$\epsilon_n = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \beta + \epsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{nl} = & \epsilon_x \cos \alpha \cos \alpha_1 + \epsilon_y \cos \beta \cos \beta_1 + \epsilon_z \cos \gamma \cos \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos \alpha \cos \beta_1 + \cos \beta \cos \alpha_1) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{yz} (\cos \beta \cos \gamma_1 + \cos \gamma \cos \beta_1) + \frac{1}{2} \gamma_{zx} (\cos \gamma \cos \alpha_1 + \cos \alpha \cos \gamma_1) \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} - \text{Tenzor deformacije}$$

4. GLAVNE DILATCIJE. INVARIJANTE DEFORMACIJE

Prema analogiji sa stanjem napona, u svakoj tački napregnutog tijela postoje tri međusobno upravna pravca koji i posle deformacije ostaju međusobno upravni tako da su klizanja između njih jednaka nuli.

Ovi pravci se nazivaju **glavni pravci deformacije** ili **glavne ose**, a odgovarajuće dilatacije su **glavne dilatacije**. Glavne dilatacije predstavljaju ekstremne vrijednosti dilatacija i obilježavamo ih ε_1 , ε_2 i ε_3 pri čemu važi konvencija $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

$$\varepsilon_i^3 - e_1 \varepsilon_i^2 + e_2 \varepsilon_i - e_3 = 0$$

$$e_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - e_1, e_2 \text{ i } e_3 \text{ invarijante stanja deformacije}$$

$$e_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)$$

$$\frac{\cos \alpha_i}{\begin{vmatrix} (\varepsilon_y - \varepsilon_i) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_i) \end{vmatrix}} = \frac{\cos \beta_i}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ (\varepsilon_z - \varepsilon_i) & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \gamma_i}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_y - \varepsilon_i) \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \end{vmatrix}} \quad i = 1, 2, 3 \quad - \quad \text{Pravci glavnih dilatacija}$$

4. GLAVNE DILATCIJE. INVARIJANTE DEFORMACIJE

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad - \text{ Tenzor deformacije u sistemu glavnih osa}$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{nl} = \varepsilon_1 \cos \alpha \cos \alpha_1 + \varepsilon_2 \cos \beta \cos \beta_1 + \varepsilon_3 \cos \gamma \cos \gamma_1 \quad - \text{ Dilatacije i klizanja u proizvoljnim pravcima}$$

$$e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$e_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \quad - \text{ Invarijante stanja deformacije}$$

$$e_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Prva invarijanta stanja deformacije (e_1) ima određeno fizičko značenje: ona predstavlja relativnu promjenu zapremine tijela u okolini neke tačke i naziva se **zapreminska ili kubna dilatacija**.

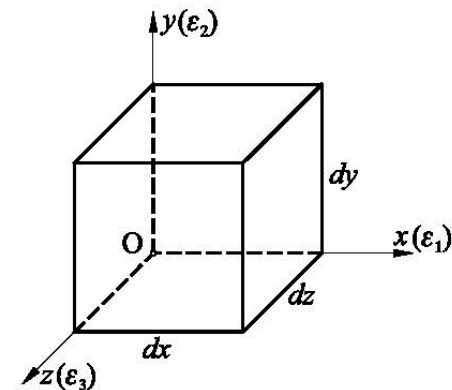
$$dx' = dx + \varepsilon_1 dx = dx(1 + \varepsilon_1)$$

$$dy' = dy + \varepsilon_2 dy = dy(1 + \varepsilon_2) \quad - \text{ stranice kvadra nakon deformacije}$$

$$dz' = dz + \varepsilon_3 dz = dz(1 + \varepsilon_3)$$

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 - 1$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e_1$$

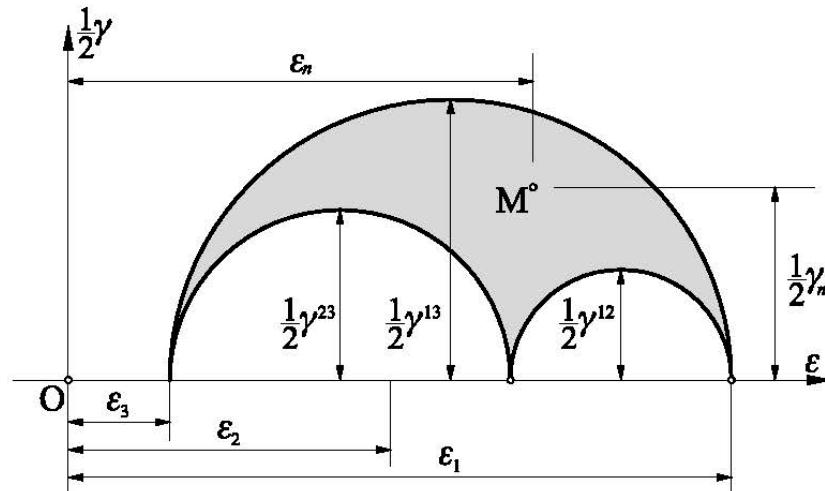


5. MOHR-OVI KRUGOVI

Prostorno stanje deformacije može se pogodno prikazati pomoću *Mohr*-ovih krugova.

Prikazani su *Mohr*-ovi krugovi, pri čemu su zbog simetrije prikazani samo gornji djelovi krugova.

Osjenčena površina između tri *Mohr*-ova kruga daje sve moguće parove deformacija ($\epsilon_n, 1/2\gamma_{nl}$) za dato stanje deformacije u tački određeno glavnim dilatacijama ϵ_1, ϵ_2 i ϵ_3 .



6. SFERNI I DEVIJATORSKI DIO TENZORA DEFORMACIJE

Ako uvedemo tzv srednju dilataciju $\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

$$[D] = [D'] + [D'']$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_s) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_s) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_s) \end{bmatrix}$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} - \text{sferni dio tenzora deformacije (promjenu zapremine)}$$

$$[D''] = \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_s) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_s) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_s) \end{bmatrix} - \text{devijatorski dio tenzora deformacije (promjenu oblika)}$$

$$e_1 = (\varepsilon_x - \varepsilon_s) + (\varepsilon_y - \varepsilon_s) + (\varepsilon_z - \varepsilon_s) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_s = 0 \text{ prva invarijanta devijatorskog dijela}$$

7. USLOVI KOMPATIBILNOSTI DEFORMACIJA

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad - \text{ veza između komponentalnih deformacija i komponentalnih pomjeranja}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

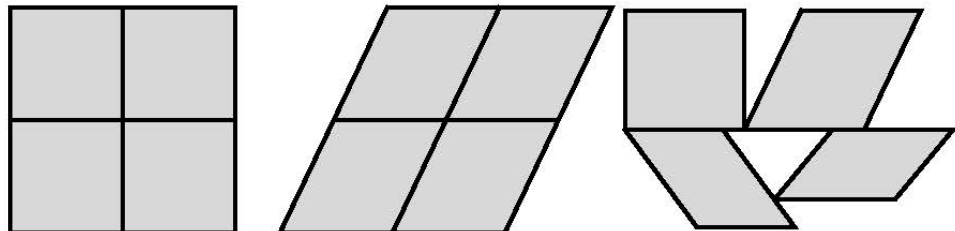
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)$$

- *Saint-Venant*-ovi uslovi kompatibilnosti deformacija



8. RAVNO STANJE DEFORMACIJE

Pomjeranja za ravno stanje deformaciju u ravni xy : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$

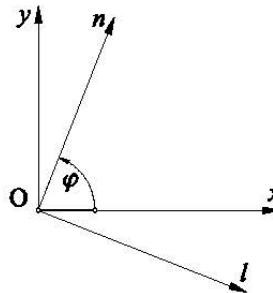
Komponente deformacije: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_z = 0$; $\gamma_{xz} = 0$; $\gamma_{yz} = 0$

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} - \text{Tenzor ravnog stanja deformacije}$$

Analogija sa ravnim stanjem napona (bez izvođenja izraza)

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{nl} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\varphi$$



- glavne dilatacije i glavni pravci

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y) > 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$$

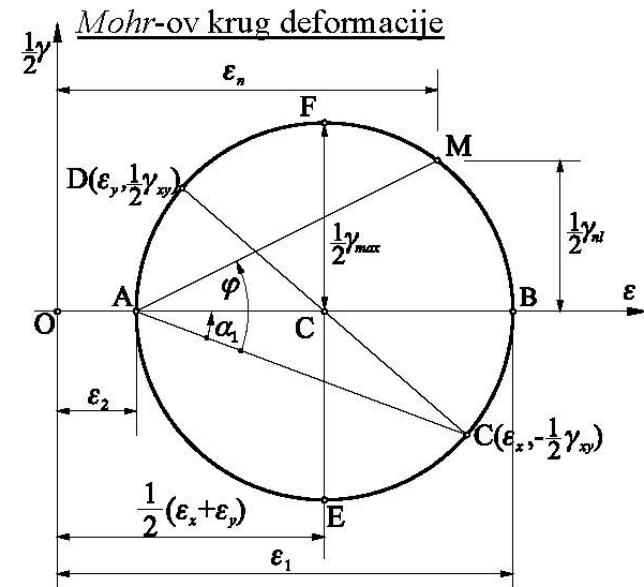
$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y) < 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) + 90^\circ$$

- pravac (1)

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha + \frac{\pi}{4}$$



8. RAVNO STANJE DEFORMACIJE

Primjer

Za ravno stanje deformacije, definisano datim tenzorom deformacije, skicirati deformaciju i odrediti glavne dilatacije, glavne pravce i prikazati elemenat u sistemu glavnih osa.

$$D = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = -3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = -4 \cdot 10^{-4}$$

Rješenje

Prikaz okoline tačke

Glavni pravci

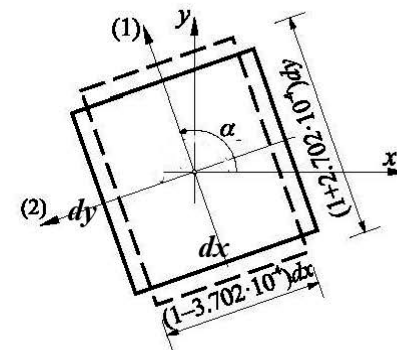
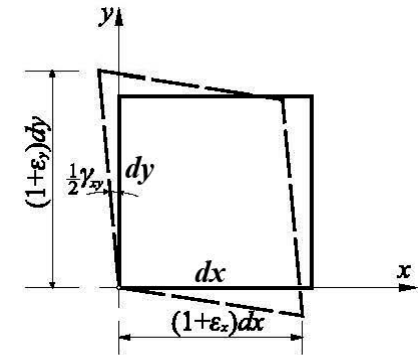
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-4}{-5}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{-4}{-5} + 90^\circ = 109.33^\circ$$

Glavne dilatacije

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \\ &= \left[\frac{1}{2}(-3 + 2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-3 - 2)^2 + (-4)^2} \right] \cdot 10^{-4} = (-0.5 \pm 3.202) \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = 2.702 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_2 = -3.702 \cdot 10^{-4}$$



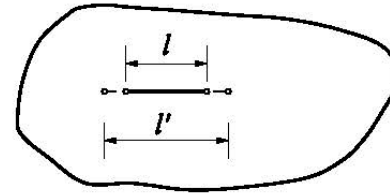
9. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE KOMPONENTI DEF.

Pri ispitivanju građevinskih konstrukcija, kako bi se provjerio nivo tačnosti proračuna, često se javlja potreba za mjerenjem deformacije u pojedinim tačkama.

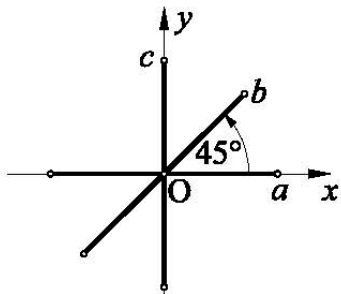
Mjerenje dilatacija se vrši na sljedeći način: na nedeformisanom tijelu u određenoj tački i u određenom pravcu u kojem želimo izmjeriti dilataciju obilježi se i izmjeri dužina l . Nakon što se tijelo deformiše ponovo se izmjeri dužina obilježene duži koja se promijenila i iznosi l'

Dilatacija se proračunava na sljedeći način

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$



Mjerenje linearnih deformacija – dilatacija je relativno jednostavno, dok je vrlo teško mjeriti uglove smicanja. Imajući u vidu navedeno za mjerenje dilatacija su razvijene pouzdane metode, dok se uglovi smicanja proračunavaju.



$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot 45^\circ) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin(2 \cdot 45^\circ) \rightarrow \gamma_{xy} = \dots$$

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Mjerenja dilatacija se mogu vršiti mehaničkim putem pomoću mjernih instrumenata, **tenzometara**, ili električnim putem, pomoću **mjernih traka (strain gauges)**.

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- VEZE IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA -



Studijska 2022/2023 godina

1. KATEGORIZACIJA MATERIJALA

Jednačine koje opisuju ponašanje materijala pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja, tj. u izvjesnom smislu opisuju njegov sastav ili konstituciju, nazivaju se **konstitutivne jednačine**. Ove jednačine uspostavljaju vezu između **komponenti napona** i **komponenti deformacije** u proizvoljnoj tački opterećenog tijela.

Za formulisanje jednačina koje opisuju ponašanje materijala pod dejstvom opterećenja, potrebno je poznavati unutrašnju strukturu materijala.

Po svojoj strukturi čvrsta tijela mogu biti:

Amorfna (izotropna tijela, npr guma)

Kristalna (anizotropna tijela, npr drvo)

Kristalasta (mali kristali različitih veličina i orijentacije, smatra se da se ponašaju izotropno, npr metali)

Pored navedene podjele, materijali se dijele na **homogene** i **nehomogene**.

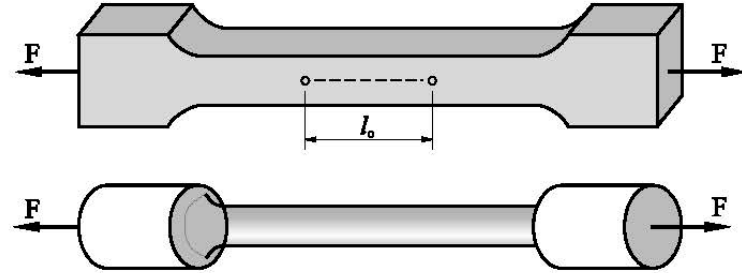
Zbog različite strukture materijali se ponašaju različito pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja. Takođe, jedan isti materijal se u različitim uslovima ponaša različito (npr pod promjenjivim opterećenjem, pod povišenom temperaturom i sl.) a i pod različitim intenzitetom opterećenja (**elastično** i **plastično** ponašanje istog materijala).

Tačno formulisanje konstitutivnih veza koje definišu ponašanje materijala u različitim uslovima je veoma složen problem. Za formulisanje ovih veza, koje su prihvatljive za rješavanje praktičnih problema, koriste se određene pretpostavke i pojednostavljenja koja su bazirana na **eksperimentalnim rezultatima**.

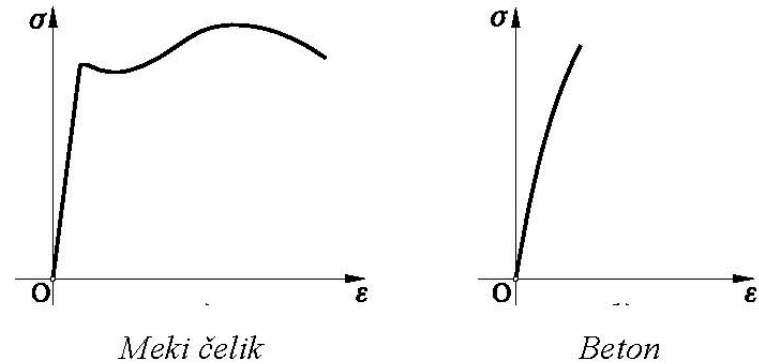
2. EKSPERIMENTALNI PODACI – Radni dijagram

Tipične epruvete koje se koriste za test istezanja

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$



Dva osnovna tipa $\sigma - \varepsilon$ dijagrama



Nagli porast deformacije pri skoro konstantnom naponu naziva se **tečenje**, što se objašnjava time da je materijal odjednom prestao da pruža otpor deformaciji, odnosno ponaša se kao da „teče“

Neki materijali, kao **meki čelik**, ponašaju se **isto pri zatezanju i pritisku**, dok se neki materijali **bitno različito ponašaju pri zatezanju i pritisku**, što je karakteristično za **beton**, koji ima znatno veću otpornost na pritisak nego na zatezanje

2. EKSPERIMENTALNI PODACI – Radni dijagram

Analiza $\sigma - \varepsilon$ dijagrama za meki čelik

P - granica proporcionalnosti (σ_P - napon na granici proporcionalnosti;

$\sigma = E \varepsilon$ - Hooke-ov zakon; E - modul elastičnosti ili Young-ov modul)

E - granica elastičnog ponašanja materijala (σ_E - granica elastičnosti)

T' i T odnosno $\sigma_{T'}$ i σ_T su gornja i donja granica tečenja

(u slučaju zatezanja granica razvlačenja ili granica velikih izduženja, a u slučaju pritiska granica gnječenja)

Očvršćavanje materijala

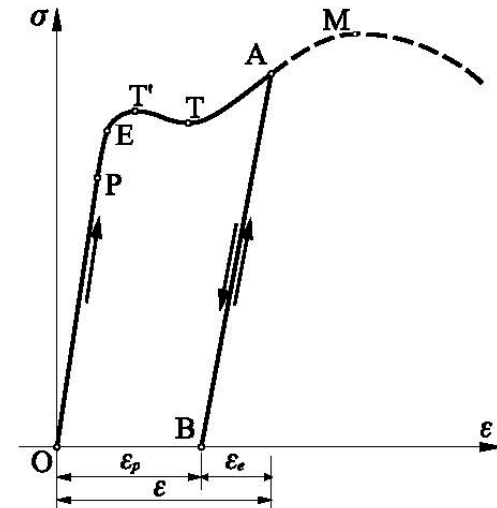
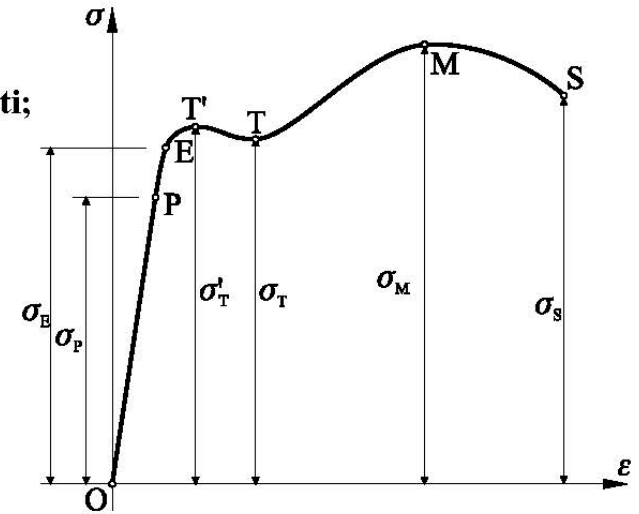
M odnosno σ_M je čvrstoća materijala

S odnosno σ_S je napon pri slomu

ε_e - elastična ili povratna deformacija

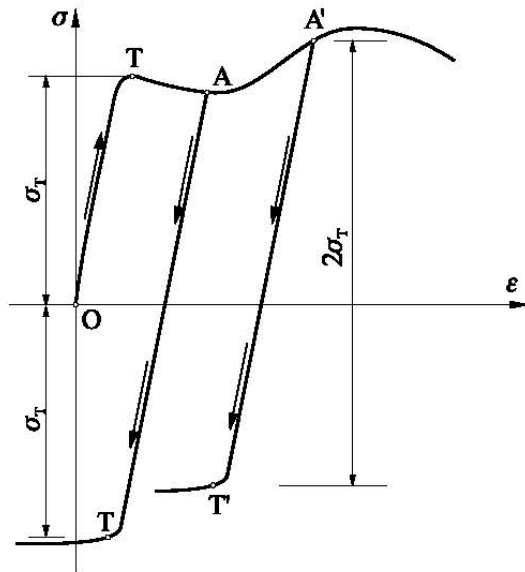
ε_p - plastična, ili nepovratna, ili trajna deformacija

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

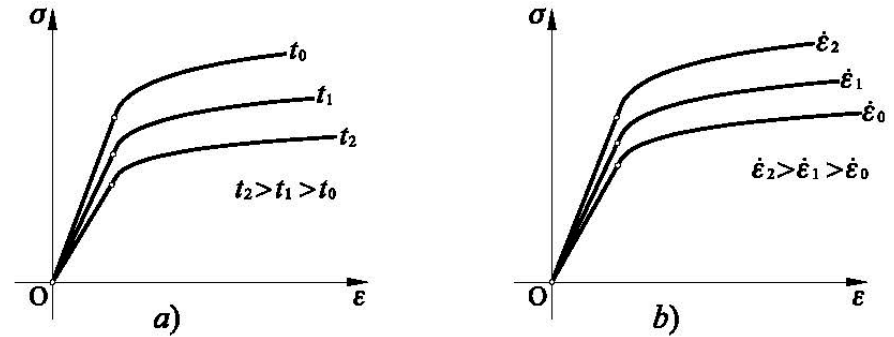


2. EKSPERIMENTALNI PODACI – Radni dijagram

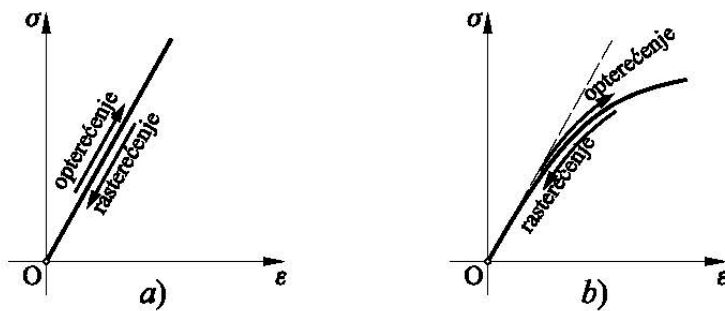
Bauchinger-ov efekat



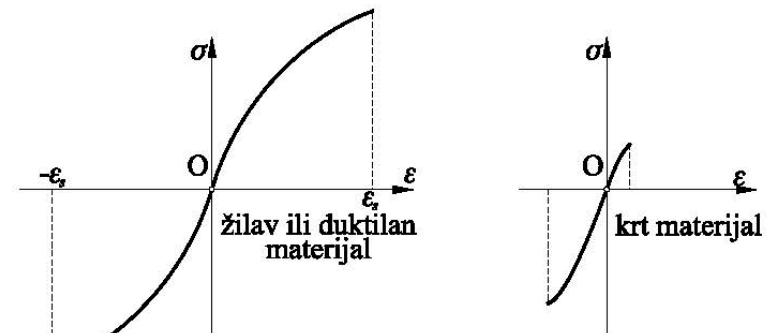
Uticaj temperature i brzine nanošenja opterećenja na deformaciju



Linearno i nelinearno elastični materijali

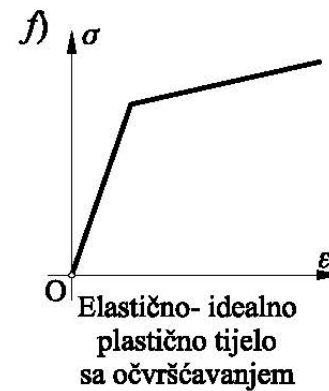
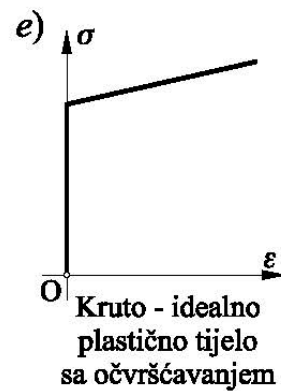
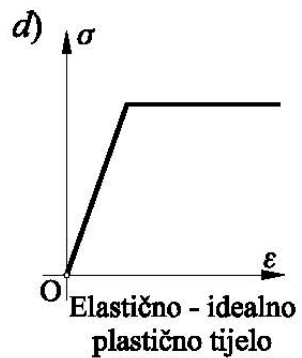
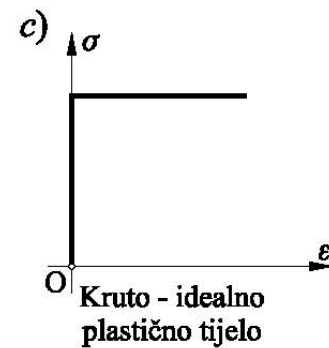
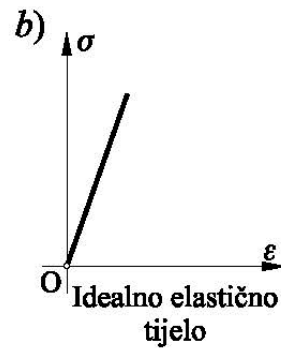
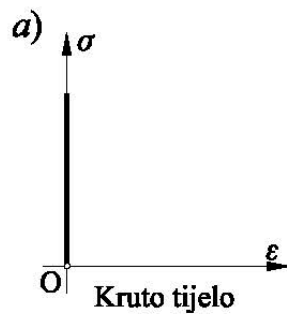


Žilavost materijala



3. IDEALIZOVANI DIJAGRAMI

Pri proračunu konstrukcija u zavisnosti od vrste materijala uvode se određena uprošćenja u konstitutivnim vezama sa ciljem da se dobiju veze koje su relativno jednostavne i prihvatljive. U tom cilju uvode se određene idealizacije u ponašanju tijela pod opterećenjem, tj. definišu se razni tipovi **idealnih tijela**.



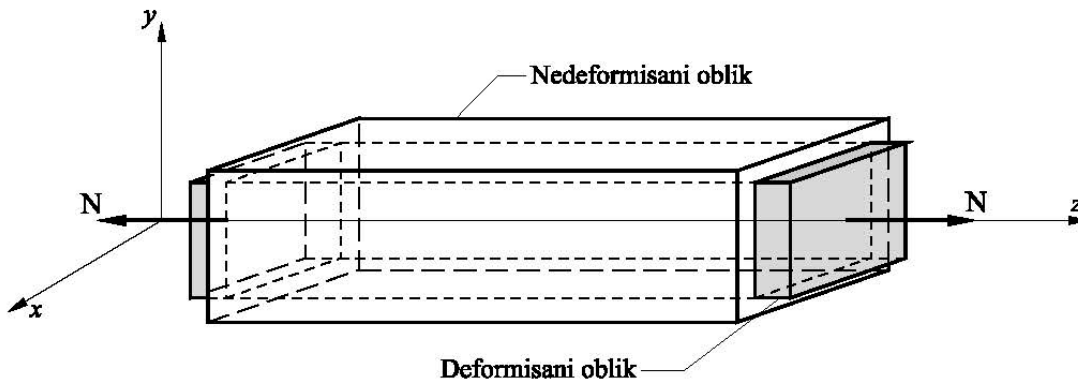
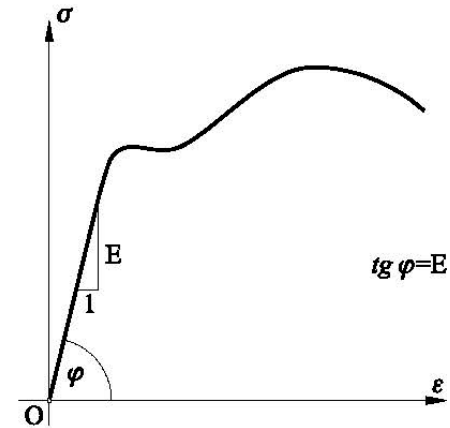
4. ELASTIČNE KONSTANTE MATERIJALA

Linearni odnos između komponenti napona i komponenti deformacije kod homogenog izotropnog materijala definiše se sa tri konstante: E , G i ν , koje se nazivaju **elastične konstante materijala**. One definišu mehaničke osobine materijala i imaju određeno fizičko značenje.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad - \text{modul elastičnosti ili } Young\text{-ov modul (MPa ili N/mm}^2\text{)}$$

($\operatorname{tg} \varphi = E$) (napon koji početnu dužinu epruvete udvostručuje)

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad - \text{modul smicanja ili modul klizanja (MPa ili N/mm}^2\text{)}$$



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z \quad (\nu - \text{Poisson-ov koeficijent ili koeficijent poprečne kontrakcije; } 0 \leq \nu \leq 1/2)$$

α_t - koeficijent termičke dilatacije (dilatacija izazvana promjenom temperature za 1°C)

4. ELASTIČNE KONSTANTE MATERIJALA

Vrsta materijala	Modul elastič. $E(GPa)$	Modul klizanja $G(GPa)$	Poasonov koeficijent ν	Napon na granici tečenja $\sigma_T(MPa)$	Prekidna čvrstoća $\sigma_M(MPa)$	Koef. termič. dilatacije $\alpha_t(10^{-5}/^{\circ}C)$
Aluminijum	70	27	0.32	140	200	2.34
Bakar	110	47	0.33	180	300	1.65
Čelik	210	81	0.30	240	450	1.17
Liveno gvožđe	100	38	0.25		800(pritisak)	1.04
					200(zatezanje)	
Beton	20-40		0.15		20-50(pritis.)	1.08
					2-5(zatez.)	

5. Generalisani Hooke-ov zakon za homogeno, izotropno idealno elastično tijelo

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \quad - \text{ za } \sigma < \sigma_P \text{ važi Hooke-ov zakon za aksijalno opterećen štapa (z podužna osa štapa)}$$

Slučaj prostornog stanja napona - vezu između napona i deformacije kod idealnog elastičnog tijela- **generalisani Hooke-ov zakon.**

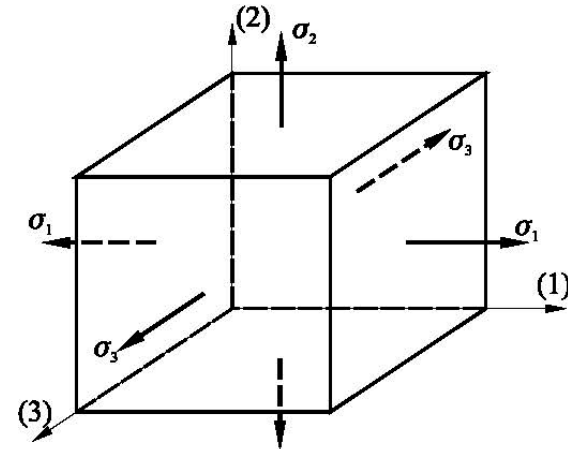
Usljed napona σ_1 : $\varepsilon_1^{(1)} = \frac{1}{E} \sigma_1, \quad \varepsilon_2^{(1)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_1, \quad \varepsilon_3^{(1)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_1$

Usljed napona σ_2 : $\varepsilon_1^{(2)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_2, \quad \varepsilon_2^{(2)} = \frac{1}{E} \sigma_2, \quad \varepsilon_3^{(2)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_2$

Usljed napona σ_3 : $\varepsilon_1^{(3)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_3, \quad \varepsilon_2^{(3)} = -\frac{\nu}{E} \sigma_3, \quad \varepsilon_3^{(3)} = \frac{1}{E} \sigma_3$

Superpozicijom odgovarajućih dilatacija dobija se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}$$



6. IDEALNO ELASTIČNO TIJELO – Veze između napona i deformacija za proizvoljno orjentisani koordinatni trijedar

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2(x,1) + \sigma_2 \cos^2(x,2) + \sigma_3 \cos^2(x,3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2(x,1) + \varepsilon_2 \cos^2(x,2) + \varepsilon_3 \cos^2(x,3)$$

$$\cos^2(x,1) + \cos^2(x,2) + \cos^2(x,3) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \cdot \cos^2(x,1) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \cdot \cos^2(x,2) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \cdot \cos^2(x,3) \end{aligned} \right\} + \rightarrow \begin{aligned} &\varepsilon_1 \cos^2(x,1) + \varepsilon_2 \cos^2(x,2) + \varepsilon_3 \cos^2(x,3) = \\ &= \frac{1}{E} \{ \sigma_1 \cos^2(x,1) + \sigma_2 \cos^2(x,2) + \sigma_3 \cos^2(x,3) - \\ &\quad - \nu [\sigma_1 (\cos^2(x,2) + \cos^2(x,3)) + \sigma_2 (\cos^2(x,3) + \cos^2(x,1)) + \\ &\quad + \sigma_3 (\cos^2(x,1) + \cos^2(x,2))] \} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 \cos^2(x,1) - \sigma_2 \cos^2(x,2) - \sigma_3 \cos^2(x,3)] \} \quad (\text{invarijantnost napona } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \sigma_x)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}} \quad \text{- veze između normalnih napona i dilatacija}$$

6. IDEALNO ELASTIČNO TIJELO – Veze između napona i deformacija za proizvoljno orjentisani koordinatni trijedar

Na sličan način ćemo izvesti veze između tangencijalnih napona i klizanja

$$\tau_{xy} = \sigma_1 \cos(x,1)\cos(y,1) + \sigma_2 \cos(x,2)\cos(y,2) + \sigma_3 \cos(x,3)\cos(y,3)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \varepsilon_1 \cos(x,1)\cos(y,1) + \varepsilon_2 \cos(x,2)\cos(y,2) + \varepsilon_3 \cos(x,3)\cos(y,3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \cdot \cos(x,1)\cos(y,1) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \cdot \cos(x,2)\cos(y,2) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \cdot \cos(x,3)\cos(y,3) \end{aligned} \right\} + \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E} \left\{ \tau_{xy} - \nu [\sigma_1 (\cos(x,2)\cos(y,2) + \cos(x,3)\cos(y,3)) + \right. \\ \left. + \sigma_2 (\cos(x,3)\cos(y,3) + \cos(x,1)\cos(y,1)) + \right. \\ \left. + \sigma_3 (\cos(x,1)\cos(y,1) + \cos(x,2)\cos(y,2))] \right\}.$$

Koristeći uslov ortogonalnosti osa x i y : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos(x,1)\cos(y,1) + \cos(x,2)\cos(y,2) + \cos(x,3)\cos(y,3) = 0$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E} (\tau_{xy} + \nu\tau_{xy}) \text{ odnosno } \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

Ako uvedemo da je $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modul klizanja $\rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

Analogno se dobija za druge dvije ose:

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}} - \text{ veze između tangencijalnih napona i klizanja}$$

6. IDEALNO ELASTIČNO TIJELO – Veze između napona i deformacija za proizvoljno orjentisani koordinatni trijedar

Generalisani Hooke-ov zakon

Određivanje komponenti deformacije iz poznatih komponenti napona

$$\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + (\alpha_t \Delta t) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + (\alpha_t \Delta t) \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + (\alpha_t \Delta t) \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{array}$$

Određivanje komponenti napona iz poznatih komponenti deformacije

(formule ne važe u slučaju dejstva temperaturne promjene (Δt))

$$\begin{array}{l} \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda e \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + \lambda e \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + \lambda e \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \end{array}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- OSNOVE DIMENZIONISANJA -



Studijska 2022/2023 godina

1. UVOD

Osnovni zadatak Otpornosti materijala

Uslovi sigurnosti i upotrebljivosti

Djelimični ili potpuni slom konstrukcije odnosno znatna plastifikacija konstrukcije

Dva tipa sloma u zavisnosti od tipa materijala: **krti slom** (prslina - prekid) i **duktilni slom** (pojava tečenja)

Linijsko stanje napona (jednoosno naprezanje) vs ravno i prostorno stanje napona (složeno naprezanje)

Kriterijumi da se uticaj složenog naponskog stanja uporedi sa uticajem jednoosnog naprezanja

Hipoteze o slomu kojima se nastoji predvideti pojava sloma za složena naponska stanja (dvoosno i troosno).

σ_e - **ekvivalentni** ili **uporedni** sračunat zražen preko komponenti tenzora prostornog stanja napona

σ_0 - **granični normalni napon** pri kojem dolazi do sloma materijala izloženog jednoosnom naprezanju

(duktilni materijali $\sigma_0 = \sigma_T$ - napon na granici tečenja; krti materijali $\sigma_0 = \sigma_M$ - čvrstoći materijala)

Slom materijala u nekoj tački napregnutog tijela pri složenom naponskom stanju nastupiće kada ekvivalentni napon dostigne veličinu graničnog napona pri jednoosnom naprezanju

$$\sigma_e = \sigma_0$$

2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

(I) – Hipoteza najvećeg normalnog napona

Slom nastaje kada najveći normalni napon po apsolutnoj vrijednosti dostigne vrijednost graničnog napona σ_0 bez obzira na veličinu ostalih napona

$$\sigma_e = \sigma_1 \text{ ili } \sigma_e = |\sigma_3|$$

Ako materijal ima različite osobine pri zatezanju $\sigma_{0(Z)}$ a pri pritisku $\sigma_{0(P)}$

$$\sigma_1 = \sigma_{0(Z)} \text{ ili } \sigma_3 = \sigma_{0(P)}$$

Eksperimenti su pokazali da ova hipoteza može dosta dobro da previdi slom kod krutih materijala a posebno u slučaju kada je najveći glavni napon po apsolutnoj vrijednosti zatežući

Kod žilavih materijala ovu hipotezu ne potvrđuju eksperimentalni podaci

Pri čistom smicanju mnogo ranije dolazi do sloma nego što bi se pri ovoj hipotezi očekivalo

Pri hidrostatičkom pritisku $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ materijal izdržava izuzetno velike napone a da ne dođe do sloma

2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

(II) – Hipoteza najveće dilatacije

Do sloma dolazi kada najveća dilatacija za dato stanje naprezanja dostigne vrijednost dilatacije pri slomu pri jednoosnom stanju napona

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\boxed{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0}$$

Ako materijal ima različite osobine pri zatezanju $\sigma_{0(z)}$ a pri pritisku $\sigma_{0(p)}$

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{0(z)}$$

$$|\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| = \sigma_{0(p)}$$

Ova hipoteza daje bolje rezultate za krte materijale

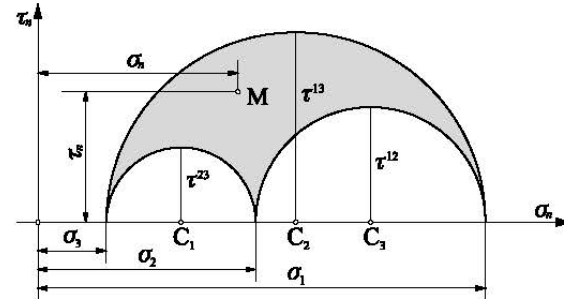
2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

(III) – Hipoteza najvećeg smičućeg napona – Treskin uslov tečenja

U materijalu će doći do sloma usled **tečenja** pri bilo kom naponskom stanju, kada maksimalni smičući napon po apsolutnoj vrijednosti dostigne graničnu vrijednost smičućeg napona pri jednoosnom naprezanju - $\tau_0 = \sigma_0/2$

Ovu teoriju potvrdili su eksperimenti koji su pokazali da materijal izložen istim pritiskajućim naponima u svim pravcima (hidrostatički pritisak) može da izdrži vrlo velike napone a da ne dođe do tečenja. Smičući naponi jednaki su nuli u svim presječnim ravnima u nekoj tački kada u njoj vlada hidrostatičko stanje napona (sferni tenzor), pa istovremeno odsustvo tečenja i smičućih napona potvrđuje teoriju o ključnoj ulozi smičućih napona pri tečenju.

$$\begin{cases} |\tau_1| < \tau_0 \\ |\tau_2| < \tau_0 \\ |\tau_3| < \tau_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_0 \\ |\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_0 \\ |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_0 \end{cases}$$



Ravno stanja napona ($\sigma_3=0$)

$$|\sigma_1| < \sigma_0$$

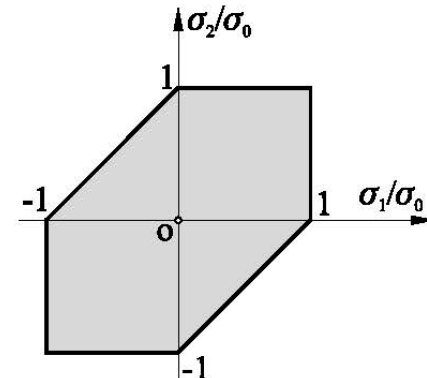
$$|\sigma_2| < \sigma_0$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_0$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Savijanje ($\sigma_y=0$) $\rightarrow \sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$

Čisto smicanje (npr. torzija) $\rightarrow \sigma_e = 2\tau$



2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

(IV) – Hipoteza najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika Huber-Hencky-Mises-ov uslov plastičnog tečenja

Slom u materijalu u nekoj tački, pri bilo kom naponskom stanju, nastupiće u trenutku kada maksimalna specifična energija deformacije (energija po jedinici zapremine) na promjeni oblika dostigne veličinu specifične energije deformacije na promjeni oblika pri slomu kod jednoosnog naprezanja

Ukupna deformacija u okolini neke tačke može rastaviti na dio koji predstavlja promjenu zapremine, definisan sfernim dijelom tenzora deformacije, i na dio koji predstavlja promjenu oblika a definisan je devijatorskim dijelom tenzora deformacije.

$$U = \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - \text{specifična energija elastične deformacije na promjeni oblika (prostor)}$$

$$U_0 = \frac{1}{6G} \sigma_0^2 - \text{granična specifična energija deformacije na promjeni oblika pri jednoosnom naprezanju}$$

$$\text{Ravno stanja napona } (\sigma_3=0) \rightarrow \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

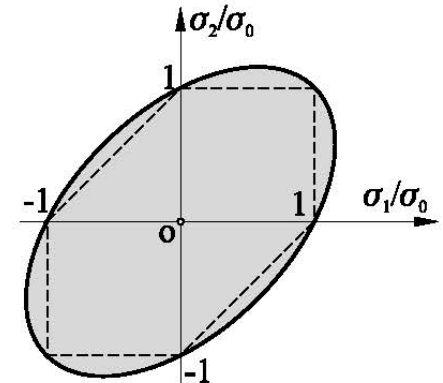
$$a = \sigma_0 \sqrt{2}$$

$$b = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} - \text{ekvivalentni napon za opšti slučaj ravnog stanja napona}$$

$$\text{Savijanje } (\sigma_y=0) \rightarrow \sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

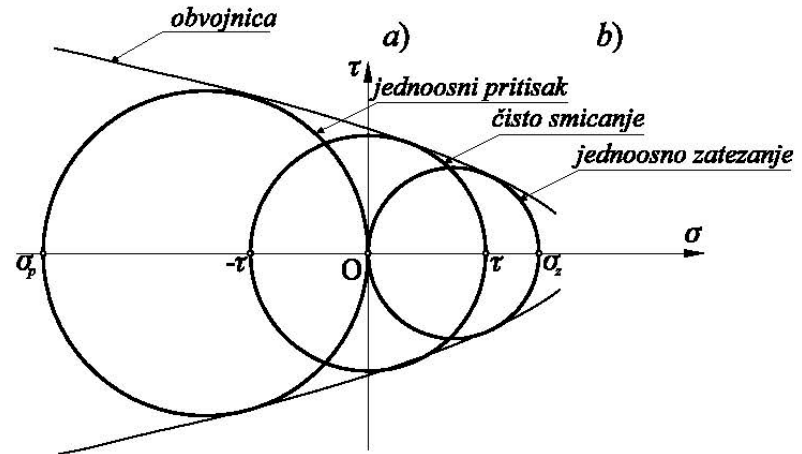
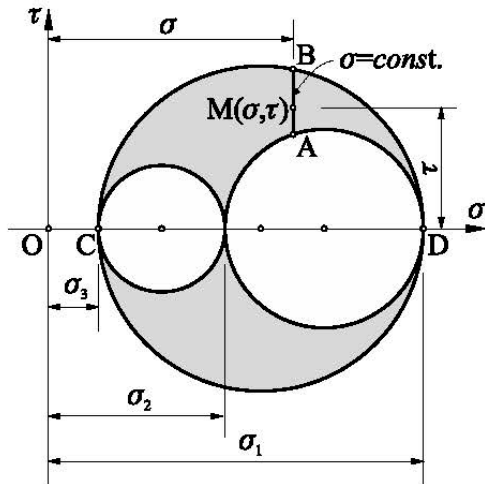
$$\text{Čisto smicanje } (\sigma_x=0 \text{ i } \sigma_y=0) \rightarrow \sigma_e = \sqrt{3}\tau_{xy}$$



2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

Mohr-ova hipoteza sloma

Grafički prikaz stanja napona u tački napregnutog tijela pomoću krugova



Tačke na istoj vertikali (npr. **AB**) prikazuju napone u ravnima sa istim normalnim naponima σ i različitim naponima smicanja τ . Najkritičnije stanje napona za ravan kojoj odgovara najveći smičući napon a to je tačka **B** na spoljašnjem krugu. Najveći spoljašnji Mohr-ov krug određen naponima σ_1 i σ_3 je dovoljan za određivanje kritičnog stanja napona.

Eksperimentalno se odrede kritična stanja pri kojima nastaje slom u slučajevima prostih naprezanja kao što su jednoosno stanje napona (pritisak i zatezanje) i čisto smicanje. Za ova naponska stanja se nacrtaju Mohr-ovi krugovi a zatim obvojnica tih krugova.

Prema Mohr-ovoj hipotezi kritično je ono stanje napona za koje najveći Mohr-ov krug napona dodiruje ili siječe obvojnici krugova napona

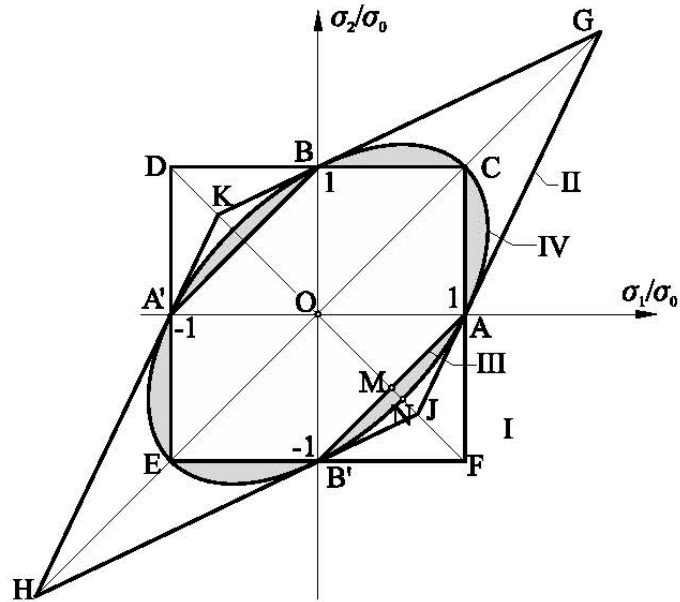
Ova hipoteza našla je najveću primjenu u Geomehanici

2. HIPOTEZE O SLOMU MATERIJALA

Uporedna analiza hipoteza

Grafički prikaz četiri osnovne hipoteze o slomu materijala za slučaj ravnog stanja napona ($\sigma_3=0$):

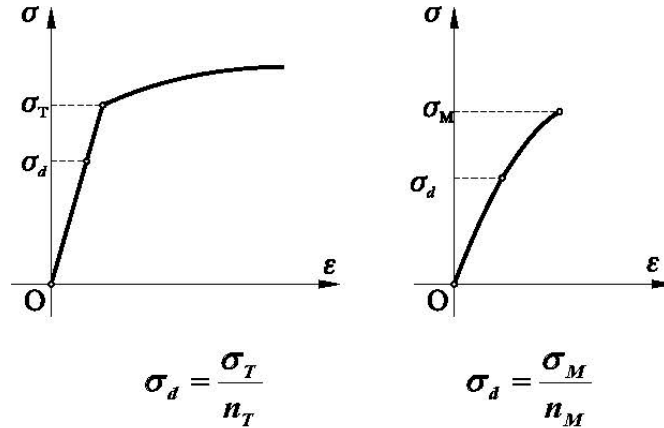
- kvadratom **CDEF**(I); Hipoteza najvećeg normalnog napona (Hipoteza I)
- sa rombom **GKHJ**(II); Hipoteza najveće dilatacije (Hipoteza II)
- sa heksagonom **ACBA'EB'**(III); Hipoteza najvećeg smičućeg napona (Hipoteza III)
- sa elipsom (IV); Hipoteza najvećeg deformacionog rada na promjeni oblika



3. DOZVOLJENI NAPONI

$\sigma_e = \sigma_0$ - jedinstveni kriterijum za nastupanje sloma u materijalu

$\sigma_e \leq \sigma_d$ gdje je σ_d - **dozvoljeni napon**



n_t i n_M - **koeficijenti sigurnosti** (uvijek veći od 1.0)

Razlozi uvođenja koeficijenata sigurnosti:

1. Stvarno opterećenje koje djeluje na konstrukciju nije egzaktno definisano
2. Metode proračuna konstrukcija zasnovane su na određenim pretpostavkama i pojednostavljenjima
3. Kvalitet gradnje i mehaničke karakteristike materijala realno variraju
4. U toku eksploatacije materijali vremenom mijenjaju mehaničke karakteristike

Koeficijenti sigurnosti su definisani tehničkim propisima za građevinske konstrukcije

4. ZAVRŠNE NAPOMENE

VRTE I KARAKTER OPTEREĆENJA

- 1. Statičko opterećenje**
- 2. Promjenljivo opterećenje (dinamičko)**
- 3. Udarno opterećenje (dinamičko)**

SLUČAJ KADA ZA DIMENZIONISANJE NIJE MJERODAVNO GRANIČNO STANJE NAPONA

- 1. Izvijanje**
- 2. Ugibi**
- 3. Vibracije**

DIMENZIONISANJE PREMA TEORIJI GRANIČNIH STANJA

- 1. Granično stanje nosivosti**
- 2. Granično stanje upotrebljivosti**

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- AKSIJALNO NAPREZANJE -

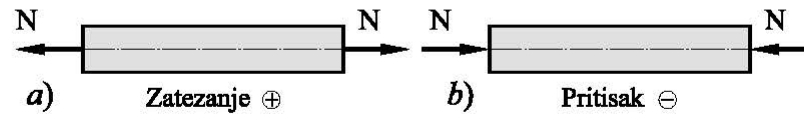


Studijska 2022/2023 godina

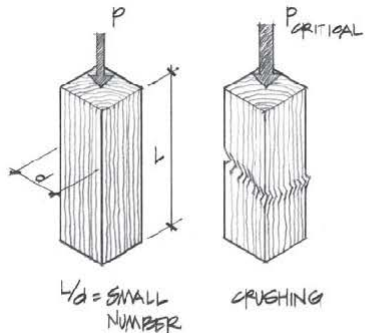
1. UVOD

Aksijalno naprezanje štapa je takav vid naprezanja kod koga se unutrašnje sile svode na jednu normalnu odnosno aksijalnu silu, čiji se pravac djelovanja poklapa sa osovnom štapa

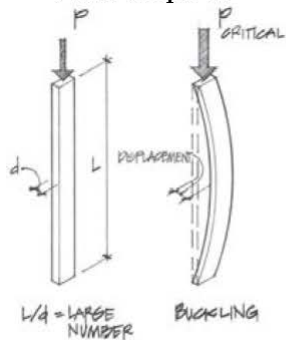
Najjednostavniji slučaj naprezanja



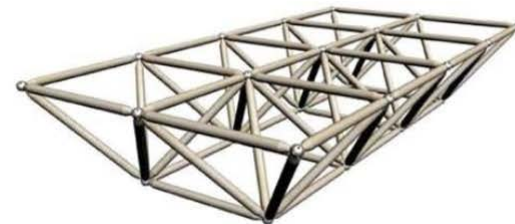
Kratki štapovi



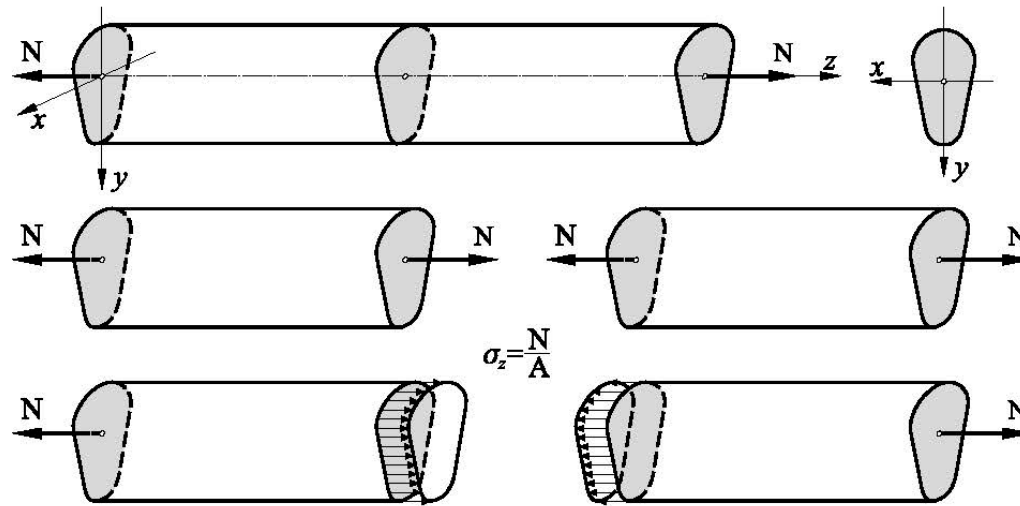
Vitki štapovi



Primjeri u praksi



2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI



$$N = \int_A \sigma_z dA$$

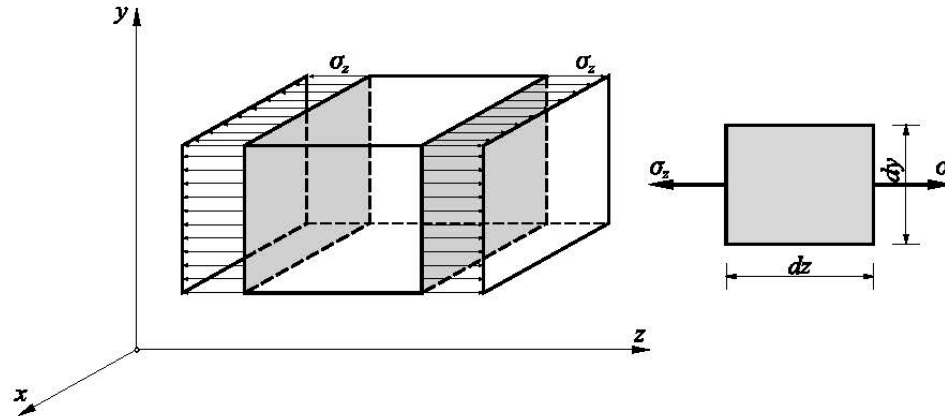
Intenzitet i raspodjela normalnih napona (σ_z) po poprečnom presjeku ???

Dopunski uslov deformacije: Eksperimentalno je utvrđeno da, pri aksijalnom opterećenju štapa, presjeci na dovoljnoj udaljenosti od mjesta djelovanja spoljašnjih sila ostaju pri deformaciji štapa i dalje ravni i normalni na osnovu štapa →

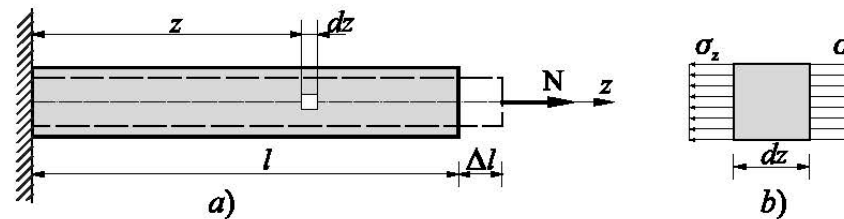
$$\epsilon_z = const \rightarrow \sigma_z = const \text{ (linearna veza između napona i deformacija)} \rightarrow N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A \rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{N}{A}}$$

2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

Linijsko stanje napona u svim tačkama aksijalno opterećenog štapa



Deformacija (izduženje ili skraćenje) aksijalno opterećenog štapa



$$dw = \varepsilon_z dz$$

Na osnovu Hooke-ovog zakona $\varepsilon_z = \sigma_z / E$

$$dw = \frac{\sigma_z}{E} dz$$

2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

$$dw = \frac{N}{EA} dz \Big|_0^z$$

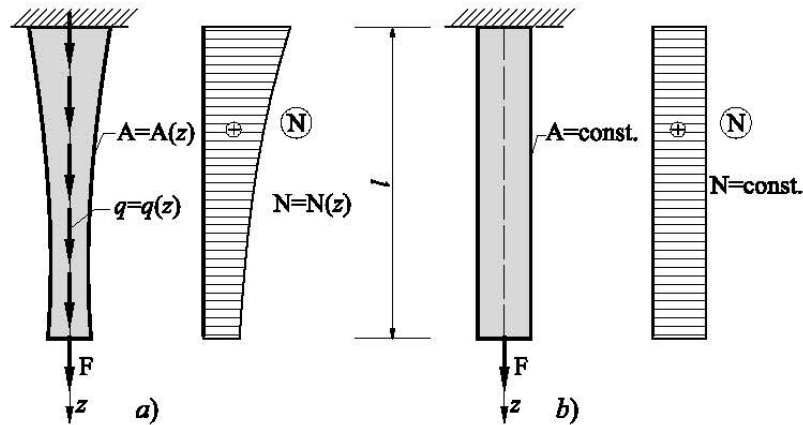
$$w = \int_0^z \frac{N}{EA} dz \quad - \text{ podužno pomjerenja presjeka } z$$

Ako sa Δl označimo **promjenu dužine cijelog štapa** ($z=l$)

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dz$$

Veličine A i N mogu biti promjenljive ($A=A(z)$ i $N=N(z)$) ili konstantne ($A=const$ i $N=const$) duž štapa.

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{N(z)}{A(z)} dz \quad \text{ili} \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

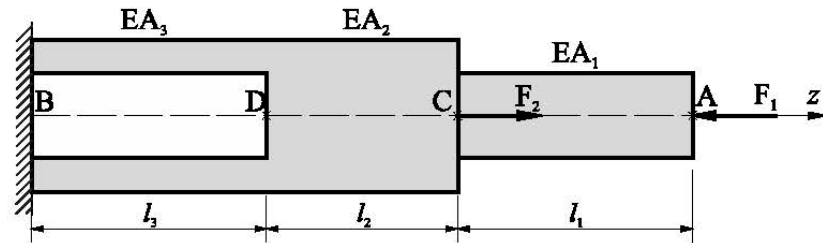


2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

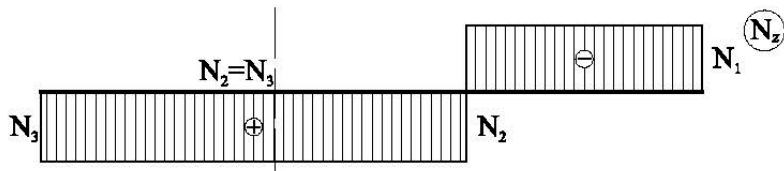
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{k}$$

$$k = \frac{EA}{l} \text{ - aksijalna krutost štapa - sila potrebna da izduži štap za jedinicu dužine (N/m)}$$

U građevinskoj praksi se često koriste štapovi koji imaju skokovitu promjenu poprečnog presjeka i uzdužne sile po dužini



$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{BD} = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \frac{N_3 l_3}{EA_3}$$



Podužna dilatacija pri aksijalnom naprezanju $\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA}$

Na osnovu podužne dilatacije može se dobiti poprečna dilatacija $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{N}{EA}$

Dimenzionisanje

$$|\sigma_z|_{\max} \leq \sigma_d \quad \rightarrow \quad |\sigma_z|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} \leq \sigma_d \quad \rightarrow \quad \boxed{A_p \geq \frac{|N|_{\max}}{\sigma_d}}$$

2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

Primjer 1.

O dva čelična štap okruglog poprečnog presjeka obješen je teret $Q=200 \text{ kN}$ kako je prikazano na slici a). Dimenzionisati štapove **AC** i **BC** ako je dopušteni napon $\sigma_d=160 \text{ MPa}$.

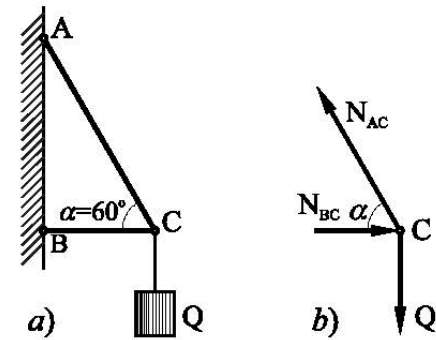
Rješenje:

Prvo ćemo odrediti sile u štapovima **AC** i **BC** metodom isjecanja čvora **C** (slika b).

Iz uslova ravnoteže slijedi:

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_{AC} = \frac{Q}{\sin 60^\circ} = \frac{200}{0.866} = 230.94 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BC} = N_{AC} \cos 60^\circ = 230.94 \cdot \cos 60^\circ = 115.47 \text{ kN}$$



Dimenzionisanje

Štap AC: $A_p \geq \frac{N_{AC}}{\sigma_d} = \frac{230.94}{16} = 14.43 \text{ cm}^2$

$$d_{AC} \geq \sqrt{\frac{4A_p}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 14.43}{3.14}} = 4.287 \text{ cm}$$

Usvojeno: $d_{AC} = 4.3 \text{ cm}$

Štap BC: $A_p \geq \frac{|N_{BC}|}{\sigma_d} = \frac{115.47}{16} = 7.22 \text{ cm}^2$

$$d_{BC} \geq \sqrt{\frac{4A_p}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7.22}{3.14}} = 3.03 \text{ cm}$$

Usvojeno: $d_{BC} = 3.1 \text{ cm}$

2. ANALIZA NAPONA I DEF. PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

Primjer 2.

Za zadati štap oblika piramide visine H i kvadratne osnove stranice a_0 , na mjestu uklještenja, odrediti maksimalni normalni napon i ukupno skraćenje usljed sopstvene težine ako je zapreminska masa materijala kupe γ .

Rješenje:

$$A_0 = a_0^2 \quad G_{\max} = V\gamma = \frac{A_0 H}{3}\gamma = \frac{a_0^2 H}{3}\gamma$$

$$a_z = \frac{a_0}{H}z \quad A_z = a_z^2 = \frac{a_0^2}{H^2}z^2 = A_0 \frac{z^2}{H^2}$$

Maksimalni normalni napon će se pojaviti na mjestu uklještenja.

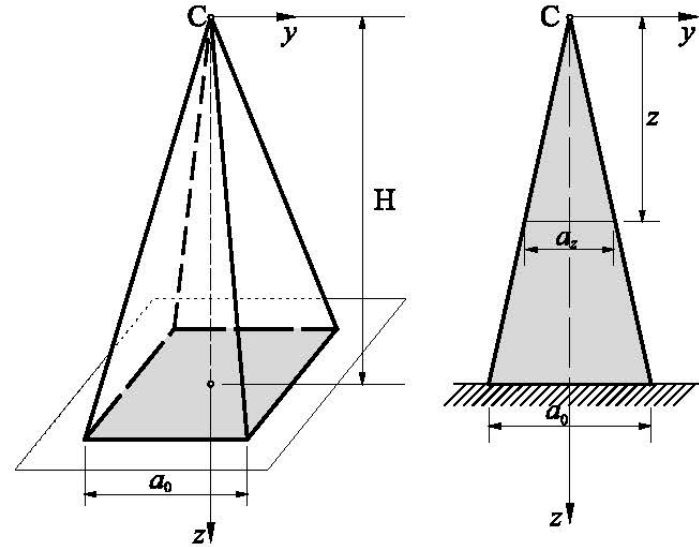
$$\sigma_{\max} = \frac{G_{\max}}{A_0} = \frac{\frac{A_0 H}{3}\gamma}{A_0} = \frac{H}{3}\gamma$$

Ukupno skraćenje Δl

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^H \frac{N_z}{A_z} dz$$

$$N_z = \frac{A_z z}{3}\gamma = \frac{A_0 \frac{z^2}{H^2} z}{3}\gamma = \frac{A_0 \gamma}{3H^2} z^3$$

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^H \frac{\frac{A_0 \gamma}{3H^2} z^3}{A_0 \frac{z^2}{H^2}} dz = \frac{\gamma}{3E} \int_0^H z dz = \frac{\gamma H^2}{6E}$$



3. STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI

Veći broj nepoznatih reakcija veza u odnosu na broj raspoloživih uslova ravnoteže

Potrebno je uvesti u analizu dodatne uslove (najčešće deformacijski uslovi)

Primjer 3.

Štap poprečnog presjeka A i dužine l ukliješten je na oba kraja u nepomjerljive oslonce. Odrediti normalne napone u štapu.

Rješenje:

Uslovi ravnoteže $\Sigma Y = 0$ i $\Sigma M = 0$ su zadovoljeni pošto nemamo poprečno opterećenje na nosač. Dakle imamo 1 uslov ravnoteže $\Sigma Z = 0$

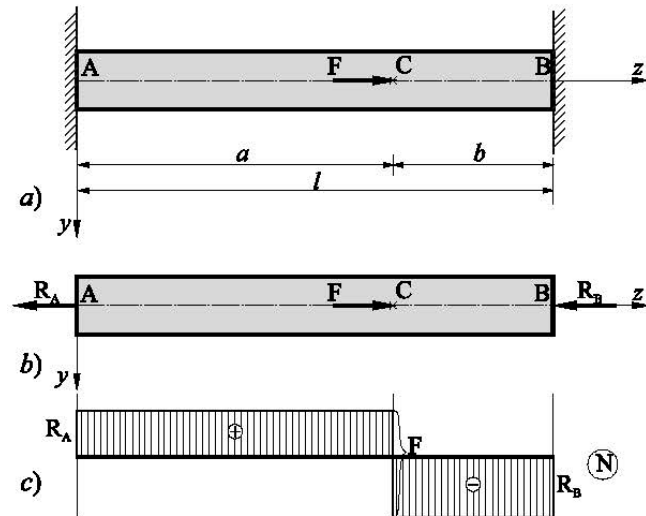
1. Uslov ravnoteže $\Sigma Z = 0 \rightarrow R_A + R_B - F = 0$

2. Deformacijski uslov $\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} - \Delta l_{BC} = 0 \rightarrow \Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC} \rightarrow \frac{R_A a}{EA} = \frac{R_B b}{EA} \rightarrow R_A = R_B \frac{b}{a}$$

$$R_A = F \frac{b}{l} \quad \text{i} \quad R_B = F \frac{a}{l}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{R_A}{A} = \frac{F b}{A l} \quad \text{i} \quad \sigma_{BC} = -\frac{R_B}{A} = -\frac{F a}{A l}$$



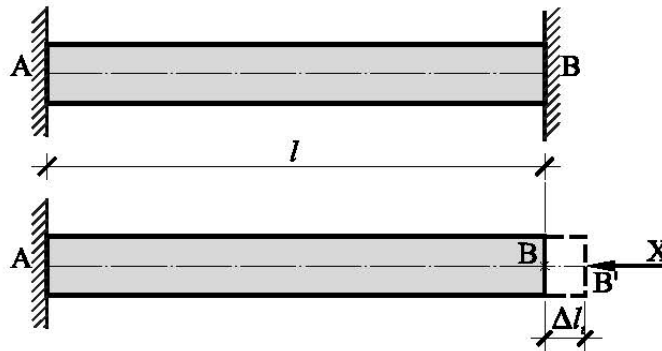
4. NAPONI PROUZROKOVANI PROMJENOM TEMPERATURE

Prema poznatom zakonu fizike sva tijela se pri povećanju temperature šire a pri smanjenju skupljaju.

$$\Delta l_t = \varepsilon_t^{(t)} l = \alpha_t \Delta t l$$

Izduženje ne zavisi od dimenzija poprečnog presjeka, za razliku od slučaja dejstva aksijalne sile $\left(\Delta l = \frac{Nl}{EA} \right)$

U slučaju kada deformacije štapa nijesu spriječene štap će se slobodno deformisati i temperaturne promjene neće izazvati napone i unutrašnje sile. Međutim, ako su deformacije spriječene nastaje naponi usljed temperaturnih promjena Δt .

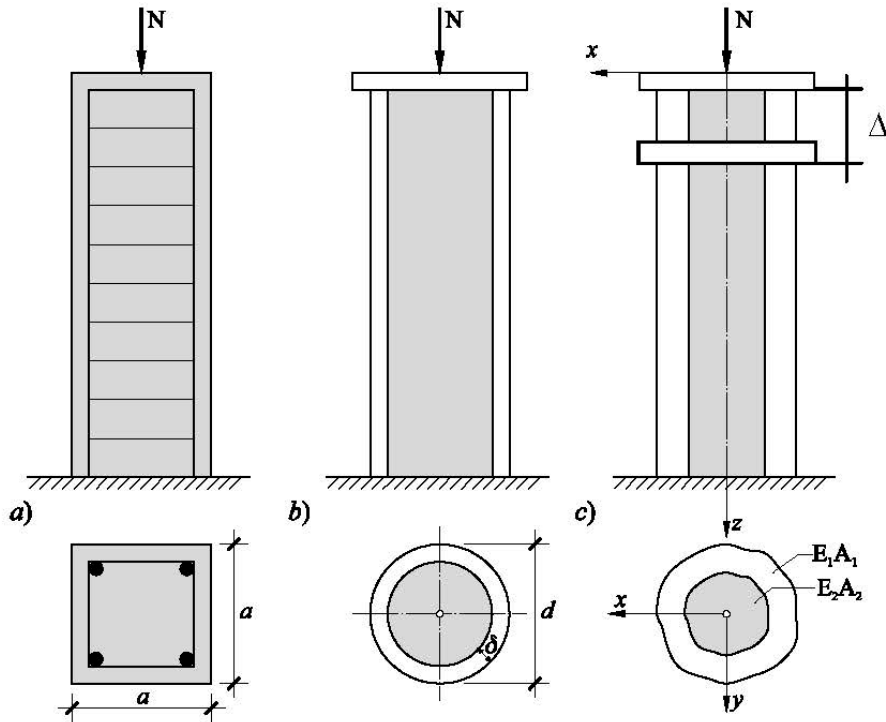


$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_x = \alpha_t \Delta t l - \frac{Xl}{EA} = 0 \quad \text{- deformacijski uslov}$$

$$X = \alpha_t \Delta t EA \quad \text{- podužne reakcije u osloncima}$$

$$\sigma = -\frac{X}{A} = -\alpha_t \Delta t E \quad \text{- normalni napon u štapu izazvan silom } X$$

5. ŠTAPOVI IZRAĐENI OD RAZLIČITIH MATERIJALA



Prvi princip je da materijali budu spregnuti u jedinstvenu konstruktivnu cjelinu, odnosno da njihov međusobni spoj bude takav da pri dejstvu spoljašnjih uticaja imaju istu deformaciju, što je uslov zajedničkog sudjelovanja.

Drugi princip koji se mora poštovati kod spreznja različitih materijala je da se mogu sprezniti samo materijali koji imaju isti ili približno isti termički koeficijent. U protivnom temperaturene promjene izazvaće pojavu dodatnih napona u spregnutom elementu.

Dio aksijalne sile N će preuzeti prvi materijal ($N_1=?$) a dio drugi materijal ($N_2=?$). **Statički neodređen problem.**

1. Statički uslov ravnoteže $\Sigma Z = 0 \rightarrow N = N_1 + N_2 \rightarrow N_2 = N - N_1$

2. Deformacijski uslov

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow \frac{N_1 h}{E_1 A_1} = \frac{N_2 h}{E_2 A_2} \rightarrow \frac{N_1}{E_1 A_1} = \frac{(N - N_1)}{E_2 A_2} \rightarrow N_1 = \frac{N}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}$$

5. ŠTAPOVI IZRAĐENI OD RAZLIČITIH MATERIJALA

Primjer 4.

Za zadati centrično opterećeni štap koji je izgrađen od čelične cijevi zapunjene betonom odrediti normalne napone u čeliku i betonu, ako je $N=500 \text{ kN}$, a moduli elastičnosti su $E_B=30 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ i $E_C=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rješenje:

$$A_{\check{c}} = 20 \cdot 20 - 18 \cdot 18 = 76 \text{ cm}^2$$

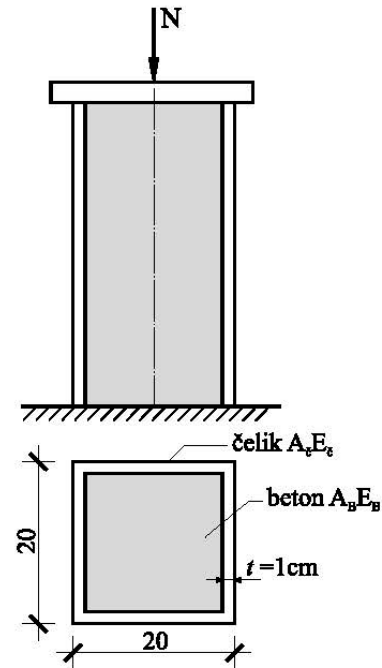
$$A_B = (20 - 2)^2 = 324 \text{ cm}^2$$

$$N_B = \frac{N}{1 + \frac{E_{\check{c}} A_{\check{c}}}{E_B A_B}} = \frac{500}{1 + \frac{2.1 \cdot 10^4 \cdot 76}{30 \cdot 10^2 \cdot 324}} = 189.25 \text{ kN}$$

$$N_{\check{c}} = N - N_B = 500 - 189.25 = 310.75 \text{ kN}$$

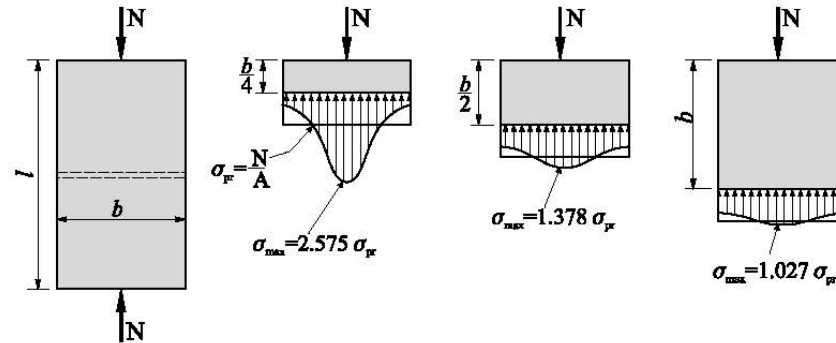
$$\sigma_B = -\frac{N_B}{A_B} = -\frac{189.25}{324} = -0.584 \text{ kN / cm}^2$$

$$\sigma_{\check{c}} = -\frac{N_{\check{c}}}{A_{\check{c}}} = -\frac{310.75}{76} = -4.089 \text{ kN / cm}^2$$

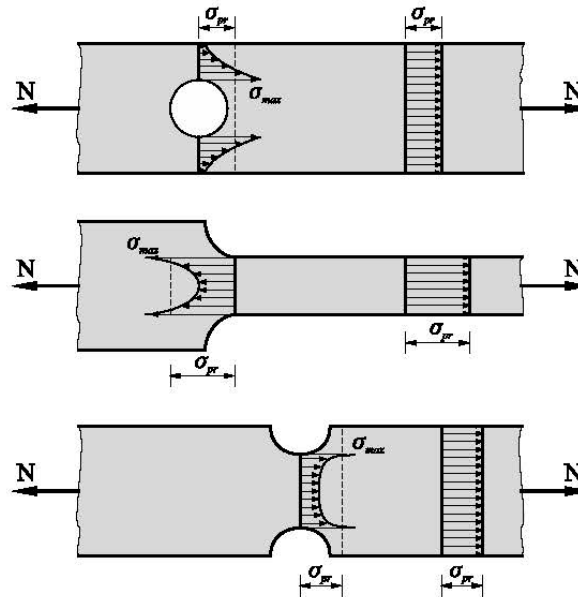


6. KONCENTRACIJA NAPONA

Koncentracija napona u presjecima u zoni unosa opterećenja



Koncentracija napona na mjestima skokovite promjene poprečnog presjeka



UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- ČISTO PRAVO SAVIJANJE -
- ČISTO KOSO SAVIJANJE -

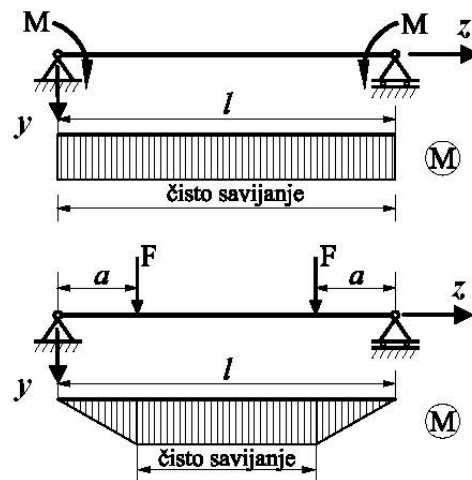


Studijska 2022/2023 godina

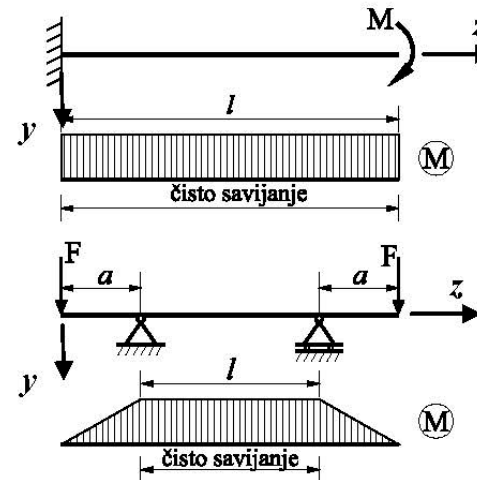
1. ČISTO SAVIJANJE - UVOD

Čisto pravo savijanje je takav vid naprezanja kod kojeg se unutrašnje sile svode na moment savijanja koji djeluje u jednoj glavnoj ravni odnosno kod kojeg moment savija presjek oko jedne od glavnih osa inercije (vektor momenta je u pravcu osa (1) ili (2))

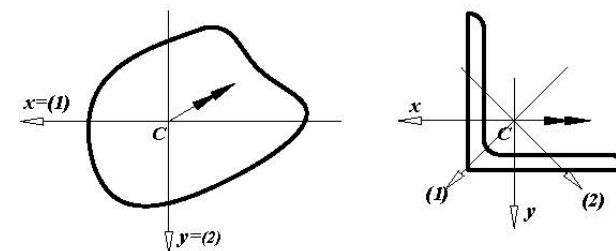
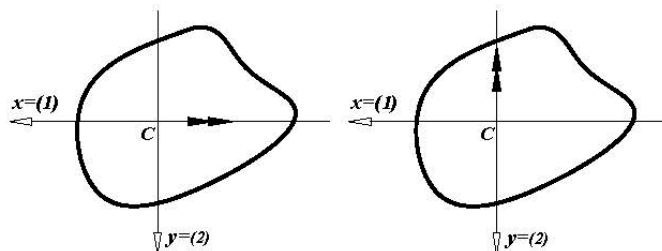
Kada se ravan savijanja ne poklapa ni sa jednom od glavnih ravni tada se javlja slučaj **čistog kosog savijanja**.



CISO PRAVO SAVIJANJE



CISO KOSO SAVIJANJE

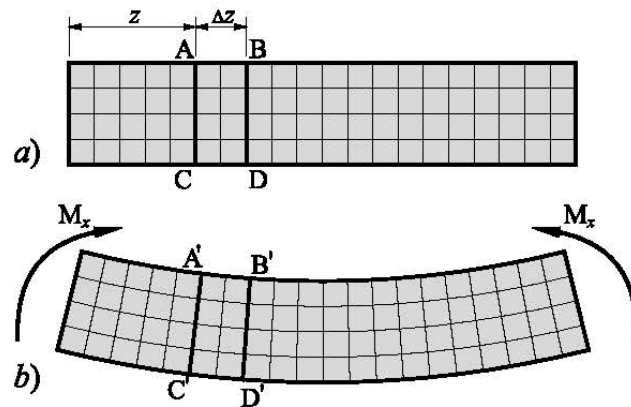
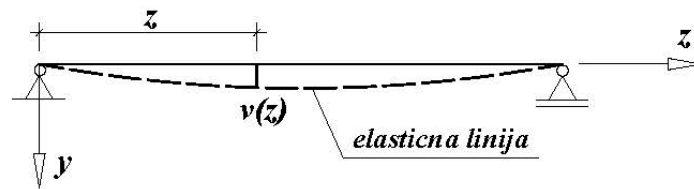


2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

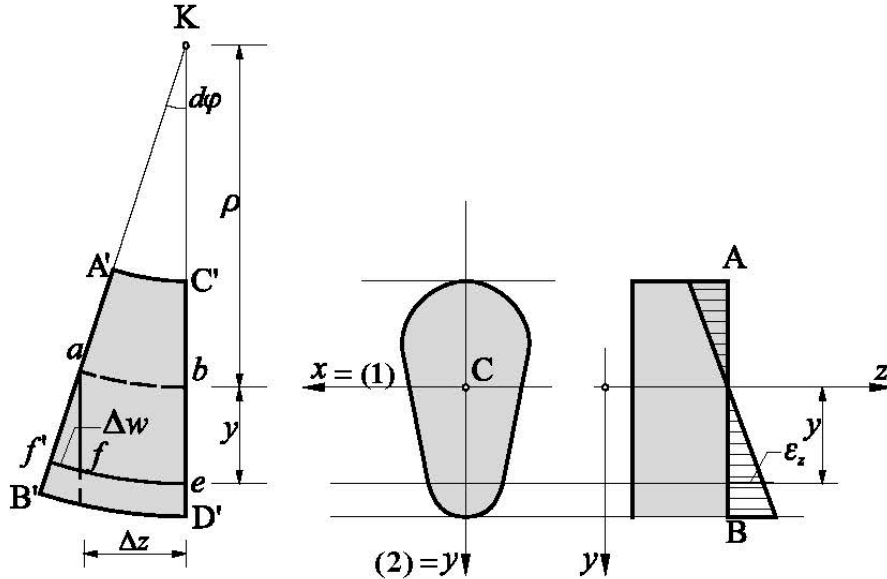
Bernoulli-jeva hipoteza ravnih presjeka - osnovna pretpostavka tehničke teorije savijanja grede u ravni: poprečni presjeci grede se ne deformišu, već poslije deformacije ostaju ravni i upravni na deformisanu osu grede.

Ordinate elastične linije $v=v(z)$ su male veličine u odnosu na poprečne dimenzije grede.



2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI



Neutralna površina. Neutralna osa.

ρ - poluprečnik krivine koji je konstantna za određeni poprečni presjek

Posmatrajmo vlakno \widehat{ef} , koje je od vlakna \widehat{ab} udaljeno za $y \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta w}{\Delta z}$

Iz sličnosti kružnih isječaka Kab i Kef' sledi da je $\frac{\Delta z + \Delta w}{\Delta z} = \frac{\rho + y}{\rho} \rightarrow \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{y}{\rho}$

$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}$ - kod čistog savijanja dilatacije vlakana su linearno proporcionalne njihovom odstojanju od neutralne ose

Hooke-ov zakon ($\sigma_z = \varepsilon_z \cdot E$) $\rightarrow \sigma_z = \frac{E}{\rho} y$ - naponi su takođe proporcionalni odstojanju vlakna od neutralne ose

($\sigma_z = 0$ za $y = 0$) - Neutralna osa – skup tačaka u kojima je normalni napon jednak nuli

2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

Veza napona σ_z sa spoljašnjim statičkim uticajima - momentom savijanja M

$$dF = \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} y dA$$

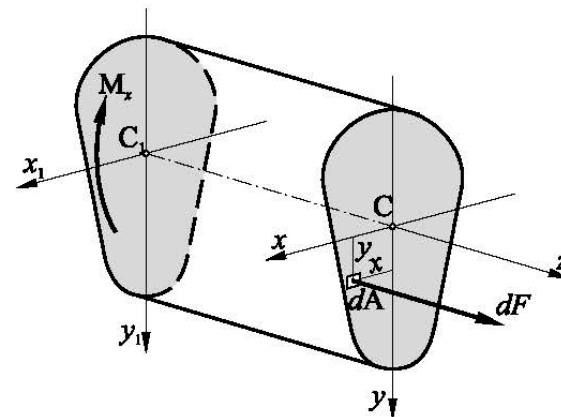
Uslovi ravnoteže spoljašnjih i unutrašnjih sila

$$(\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma M_z = 0)$$

$$\Sigma Z = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A dF = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A y dF = M_x$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A x dF = 0$$



$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad S_x = \int_A y dA = 0 \quad (x \text{ osa je centralna osa})$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x \quad I_x = \int_A y^2 dA \quad (\text{aksijalni moment inercije za osu } x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} = \text{const} \quad \left(\sigma_z = \frac{E}{\rho} y \right)$$

$$\frac{E}{\rho} \int_A x y dA = 0 \quad I_{xy} = \int_A x y dA = 0 \quad (\text{centrifugalni moment inercije za glavne ose } xy)$$

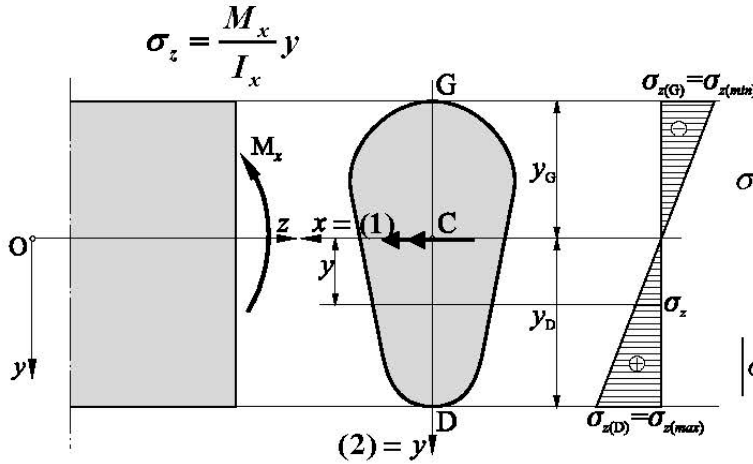
Proizvod EI_x naziva se **krutost grede u odnosu na savijanje**. Izraz za krivinu $1/\rho$ pokazuje da je krivina konstanta, što znači da je pri čistom savijanju deformaciona linija grede kružni luk.

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y} \quad - \text{ Luj Navier-ova formula savijanja (početak 19. vijeka)}$$

2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI

Dijagram normalnih napona - linearna raspodjela normalnih napona po visji presjaka



U vlaknu D , čiji je položaj definisan sa y_D , djeluje maksimalni napon

$$\sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{M}{I_x} y_D; \quad W_{x(D)} = \frac{I_x}{y_D};$$

$$\sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{M}{W_{x,(D)}}$$

U vlaknu G , čiji je položaj definisan sa y_G , djeluje minimalni napon

$$|\sigma_{z(G)}| = |\sigma_{z(min)}| = \frac{M}{I_x} y_G; \quad W_{x(G)} = \frac{I_x}{y_G};$$

$$\sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = \frac{M}{W_{x,(G)}}$$

W_x – otporni moment inercije pp u odnosu na osu x (cm^3)

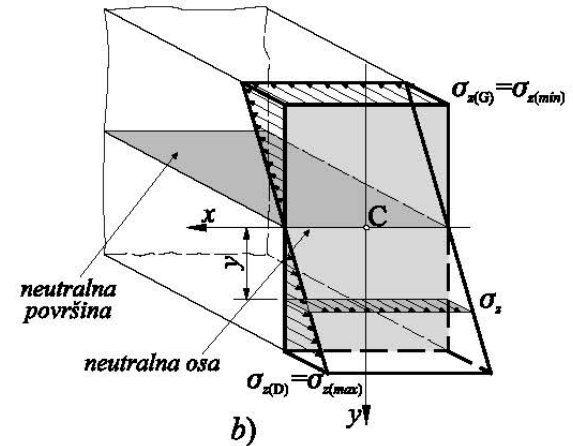
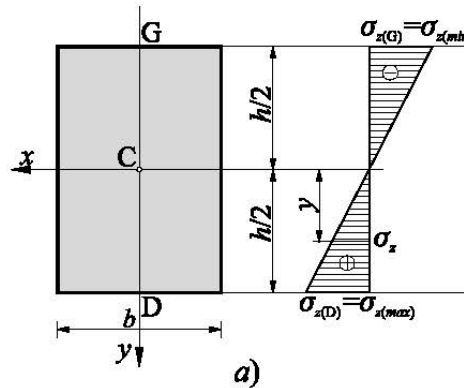
Za pravougaoni presjek i ostale dvoosno simetrične presjeke ekstremni normalni naponi su isti po apsolutnoj vrijednosti

$$(|\sigma_{z(max)}| = |\sigma_{z(min)}|).$$

$$y_D = y_G = \frac{h}{2} \rightarrow$$

$$W_{x,D} = W_{x,G} = W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{z(D,G)} = \sigma_{z(max,min)} = \pm \frac{M_x}{W_x}$$



2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

DEFORMACIJA GREDE PREMA TEORIJI ELASTIČNOSTI

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \frac{M_x}{I_x} y = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_x &= -\nu \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \frac{M_x}{I_x} y = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= -\nu \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \frac{M_x}{I_x} y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= 0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= 0 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= 0 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \int \rightarrow$$

6 integracionih konstanti
određujemo iz konturnih uslova:

$$\begin{aligned} x=y=z=0 &\rightarrow u=v=w=0 \\ x=y=0, z=l &\rightarrow u=v=w=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu M_x}{EI_x} xy \\ v &= \frac{\nu M_x}{2EI_x} \left[x^2 - y^2 - \frac{1}{\nu} (z^2 - lz) \right] \\ w &= \frac{M_x}{2EI_x} y(2z - l) \end{aligned}$$

Izraz za pomjeranje w u pravcu ose z je linearna funkcija koordinate y , što pokazuje da ravni presjeci ostaju ravni i poslije deformacije, čime se potvrđuje *Bernoulli*-eva hipoteza iz elementarne teorije.

Ako u izrazu za v uzmemo da je $x=y=0 \rightarrow v = \frac{M_x}{2EI_x} (lz - z^2)$ - jednačina **elastične linije** štapa izloženog pravom savijanju

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{\rho} \approx \pm \frac{d^2 v}{dz^2} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 v}{dz^2} = \pm \frac{M_x}{EI_x}} - \text{Diferencijalna jednačina elastične linije}$$

2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE DIMENZIONISANJE

$$\sigma_{z(\max)} = \frac{M_x}{I_x} y_D \text{ ili } \sigma_{z(\max)} = \frac{M_x}{W_{x(D)}}$$

$$\sigma_{z(\min)} = \frac{M_x}{I_x} y_G \text{ ili } \sigma_{z(\min)} = \frac{M_x}{W_{x(G)}}$$

Ako materijal ima isti dopušteni napon za pritisak i zatezanje σ_d

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} |y|_{\max} \leq \sigma_d$$

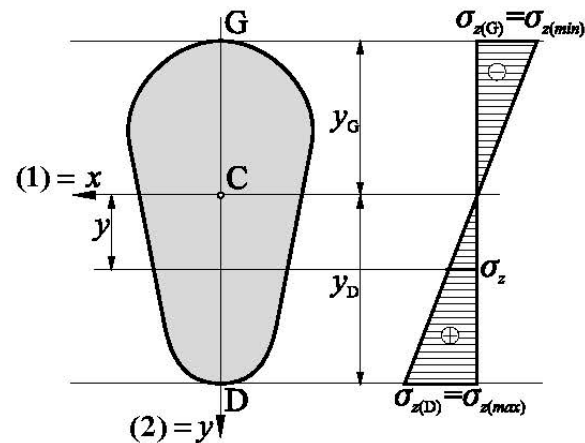
Za dvoosno simetrične presjeke (npr pravougaonik)

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_d \rightarrow W_{x(\text{pot.})} \geq \frac{|M_x|}{\sigma_d}$$

Ako materijal ima različite dopuštene napone pri pritisku σ_{dp} i zatezanju σ_{dt}

$$W_{x(\text{pot.})}^{(D)} \geq \frac{|M_x|}{\sigma_{dz}}$$

$$W_{x(\text{pot.})}^{(G)} \geq \frac{|M_x|}{\sigma_{dp}}$$

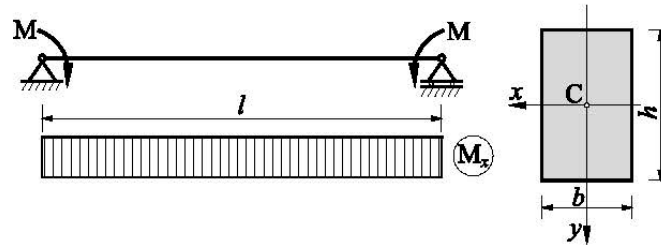


2. ČISTO PRAVO SAVIJANJE

DIMENZIONISANJE

Primjer 1.

Dimenzionisati drveni nosač sistema proste grede, koji je napregnut na čisto pravo savijanje momentom $M_x = 20 \text{ kNm}$, ako je dopušteni napon pri savijanju $\sigma_d = 10 \text{ MPa}$ a presjek pravougaoni sa odnosom strana $h/b = 2$, a zatim nacrtati dijagram normalnih napona.



W_x - potrebni otporni moment

$$W_x \geq \frac{M_x}{\sigma_d} = \frac{20 \cdot 10^2}{1} = 2000 \text{ cm}^3$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$$

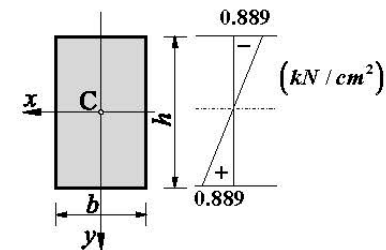
$$b = \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 3}{2}} = 14.42 \text{ cm}, \text{ Usvojeno: } b = 15 \text{ cm}$$

$$h = 2b = 30 \text{ cm}$$

Usvojene dimenzije grede su $b/h = 15/30 \text{ cm}$.

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 30^2}{6} = 2250 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{z(\max)} = \pm \frac{M_x}{W_x} = \pm \frac{20 \cdot 10^2}{2250} = \pm 0.889 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_d = 1.0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ MPa}$$



3. ČISTO KOSO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA

Moment savijanja M djeluje u pravcu koji nije niti (1) niti (2)

$$M_x = M \cos \beta$$

$$M_y = M \sin \beta$$

$$\sigma_z = \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_z = M \left(\frac{\cos \beta}{I_x} y + \frac{\sin \beta}{I_y} x \right)$$

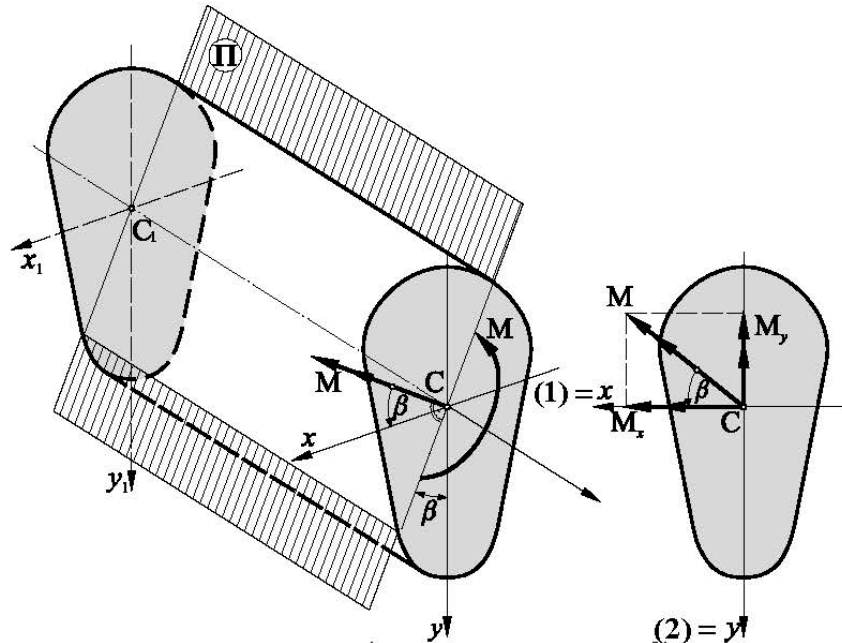
Neutralna osa – $\sigma_z=0$

$$\sigma_z = M \left(\frac{\cos \beta}{I_x} y + \frac{\sin \beta}{I_y} x \right) = 0$$

$$\frac{\cos \beta}{I_x} y + \frac{\sin \beta}{I_y} x = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = -\frac{I_x}{I_y} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_1}{I_2} \operatorname{tg} \beta$$



3. ČISTO KOSO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA

$$\sigma_z^{(M_x)} = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_z^{(M_y)} = \frac{M_y}{I_y} x$$

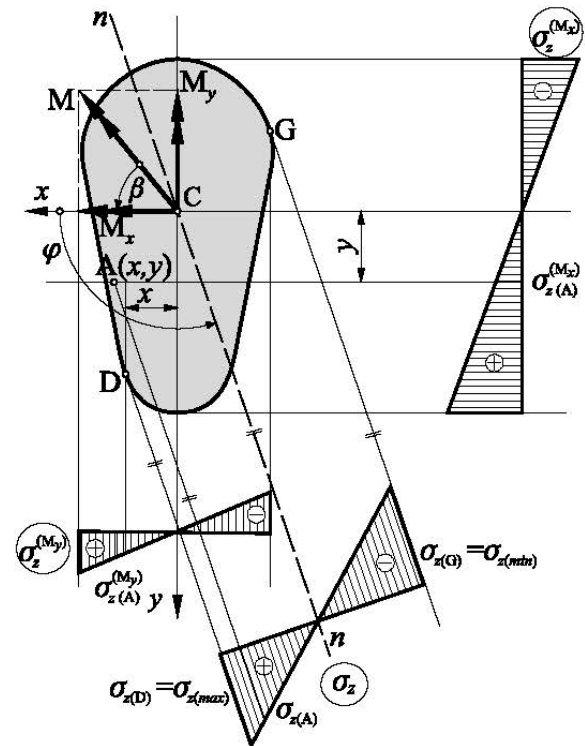
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Tačka A(x_A, y_A) $\sigma_z = \sigma_{z(A)} = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A$

Tačka D(x_D, y_D) $\sigma_z = \sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{M_x}{I_x} y_D + \frac{M_y}{I_y} x_D$

Tačka G(x_G, y_G) $\sigma_z = \sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = \frac{M_x}{I_x} y_G + \frac{M_y}{I_y} x_G$

Tačka C(0, 0) $\sigma_z = \sigma_{z(C)} = 0$



3. ČISTO KOSO SAVIJANJE

ANALIZA NAPONA

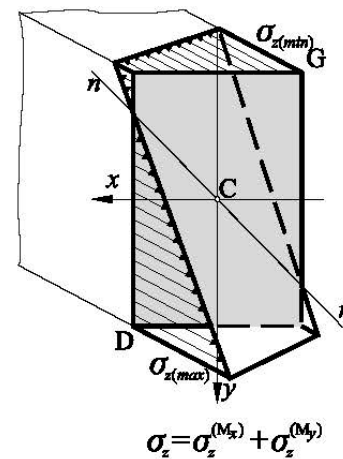
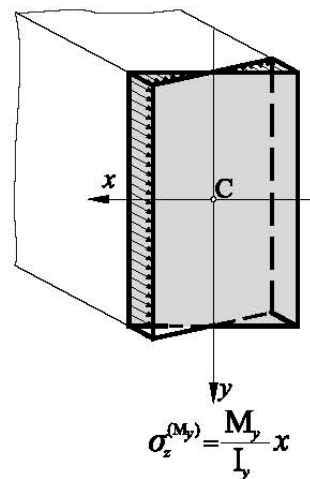
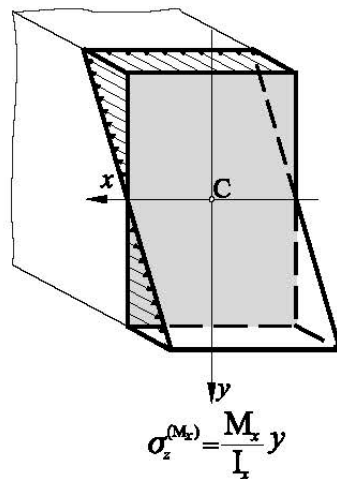
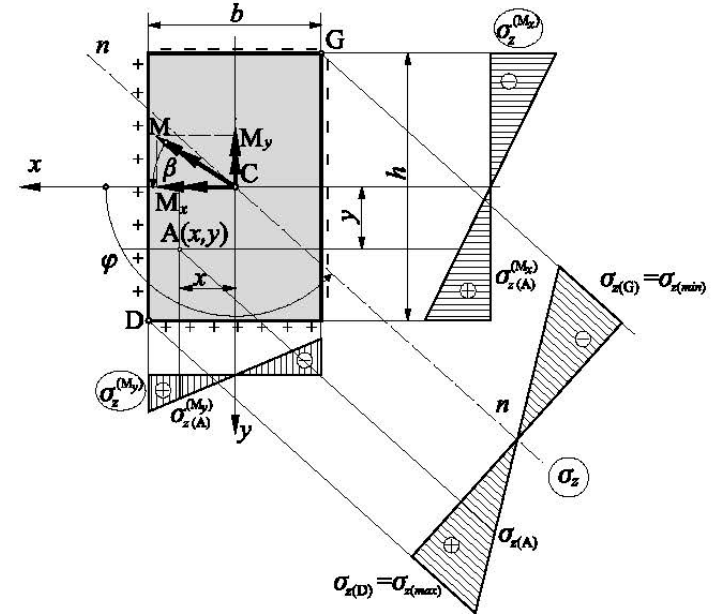
Dvoosno simetrični presjeci (pravougaoni poprečni presjek)

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} \quad W_y = \frac{I_y}{\frac{b}{2}}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma_{z(max,min)} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$



3. ČISTO KOSO SAVIJANJE DIMENZIONISANJE

Materijal ima isti dopušteni napon pri pritisku i zatezanju

$$\sigma_{z(\max)} = \frac{M_x}{I_x} y_D + \frac{M_y}{I_y} x_D \leq \sigma_d$$

$$\sigma_{z(\min)} = \frac{M_x}{I_x} y_G + \frac{M_y}{I_y} x_G \leq \sigma_d$$

Šest nepoznatih, I_x , I_y , x_D , y_D , x_G i y_G , dvije jednačine – iterativan postupak dimenzionisanja

Dvoosno simetrični presjeci

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_d \quad \rightarrow \quad W_x \geq \frac{1}{\sigma_d} (|M_x| + k|M_y|) \quad k = \frac{W_x}{W_y}$$

Koeficijent k zavi od oblika poprečnog presjeka:

- Za kvadratni presjek: $k = 1$
- Za kružni presjek: $k = 1$
- Za pravougaoni presjek: $k = \frac{h}{b}$
- Za čelične „I“ NP profile: $k \approx 7 - 10$
- Za čelične pajner profile: $k \approx 3 - 5$
- Za čelične „U“ profile: $k \approx 5 - 10$

3. ČISTO KOSO SAVIJANJE

DIMENZIONISANJE

Primjer 2.

Dimenzionisati gredu opterećenu na čisto koso savijanje momentom $M=5kNm$. Greda je urađena od „I“ NP čeličnog profila sa dopuštenim naponom na savijanje $\sigma_a = 160MPa$. Nakon dimenzionisanja nacrtati dijagram normalnih napona.

Rješenje:

$$M = 5 \text{ kNm}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad \beta = 210^\circ$$

$$M_x = M \cos \beta = -4.33 \text{ kNm}; \quad M_y = M \sin \beta = -2.50 \text{ kNm}$$

$$W_x \geq \frac{1}{\sigma_a} (|M_x| + k |M_y|)$$

Za I NP čelične profile usvojeno je: $k \approx 8$

$$W_x \geq \frac{1}{16} (4.33 + 8 \cdot 2.50) \cdot 10^2 = 152.06 \text{ cm}^3$$

Iz tablica za čelične profile usvaja se:

$$\text{I NP 18, sa } W_x = 161 \text{ cm}^3, I_x = 1450 \text{ cm}^4, W_y = 19.80 \text{ cm}^3, I_y = 81.3 \text{ cm}^4,$$

Kontrola napona (pošto je za k usvojena približna vrijednost)

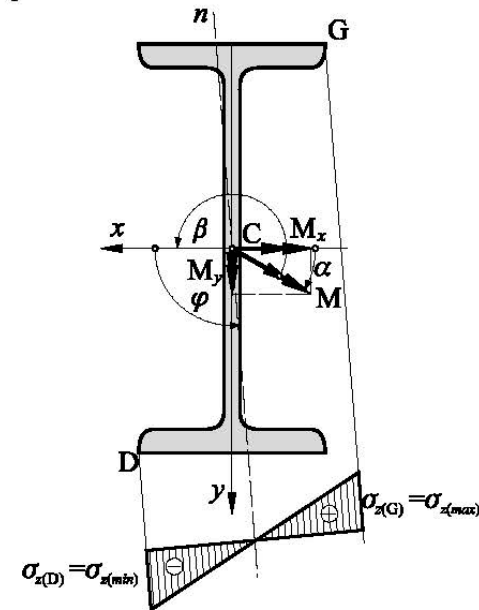
$$\sigma_{z(\max, \min)} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} = \pm \frac{4.33 \cdot 10^2}{161} \pm \frac{2.50 \cdot 10^2}{19.80} = \pm 2.689 \pm 12.626 = \pm 15.315 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_a = 16.0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{I_x}{I_y} \text{tg } \beta = -\frac{1450}{81.3} 0.577 = -10.297$$

$$\varphi = \text{arctg}(-10.297) + 180^\circ = 95.55^\circ$$

$$\sigma_{z(D)} = \sigma_{z(\min)} = -15.315 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{z(G)} = \sigma_{z(\max)} = 15.315 \text{ kN/cm}^2$$



UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

- EKSCENTRIČNO NAPREZANJE -



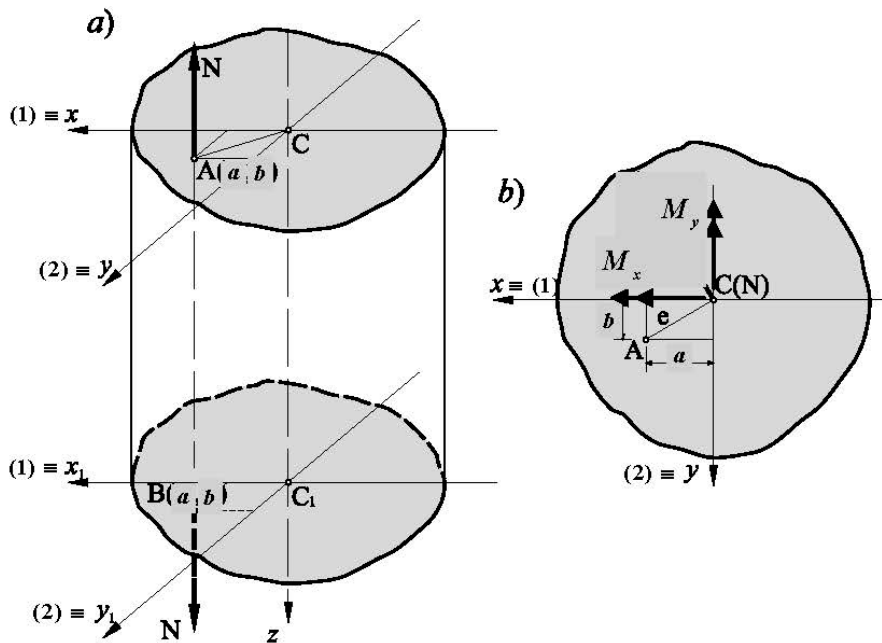
Studijska 2022/2023 godina

1. OPŠTI SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA

Ekscentrično opterećena greda je greda kod koje je pravac djelovanja rezultante spoljašnjih sila paralelan podužnoj osi grede

Brojni primjeri u inženjerskoj praksi: stubovi, potporne konstrukcije i sl

Prikazana analiza ne važi za slučaj vitkih ekscentrično pritisnutih štapova



x i y su glavne ose: $x=(1)$ i $y=(2)$

$A(a, b)$ - napadna tačka sila N u koordinatnom sistemu xy

N redukujemo na težište presjeka

$$N_z = N$$

$$M_x = N \cdot b$$

$$M_y = N \cdot a$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)} = \\ &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \end{aligned}$$

1. OPŠTI SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot b}{I_x} y + \frac{N \cdot a}{I_y} x$$
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \rightarrow \quad I_x = A i_x^2$$
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad \rightarrow \quad I_y = A i_y^2$$

Poluprečnici inercije u odnosu na osu x (i_x) i u odnosu na osu y (i_y) - nove geometrijske karakteristike (cm)

$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y}{i_x^2} + \frac{a \cdot x}{i_y^2} \right)$$

σ_z - normalni napon u proizvoljnoj tački poprečnog presjeka čije su koordinate x i y

N - ekscentrična podužna sila

A - površina poprečnog presjeka

a i b - koordinate napadne tačke sile

i_x i i_y - poluprečnici inercije za koordinatne ose x i y

x, y - koordinate posmatrane tačke

Neutralna linija – skup tačaka u kojima je normalni napon jednak nuli ($\sigma_z=0$)

$$1 + \frac{b \cdot y}{i_x^2} + \frac{a \cdot x}{i_y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{i_y^2}{a}} + \frac{y}{-\frac{i_x^2}{b}} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1} \quad \text{- jednačina prave (neutralne linije)}$$

$$\boxed{p = -\frac{i_y^2}{a} \quad q = -\frac{i_x^2}{b}} \quad \text{- odsječci neutralne linije na koordinatnim osama (p na osi $x=(1)$, q na osi $y=(2)$)}$$

1. OPŠTI SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA

Ekstremni normalni naponi

$$\text{Tačka } D(x_D, y_D) \quad \sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_D}{i_x^2} + \frac{a \cdot x_D}{i_y^2} \right)$$

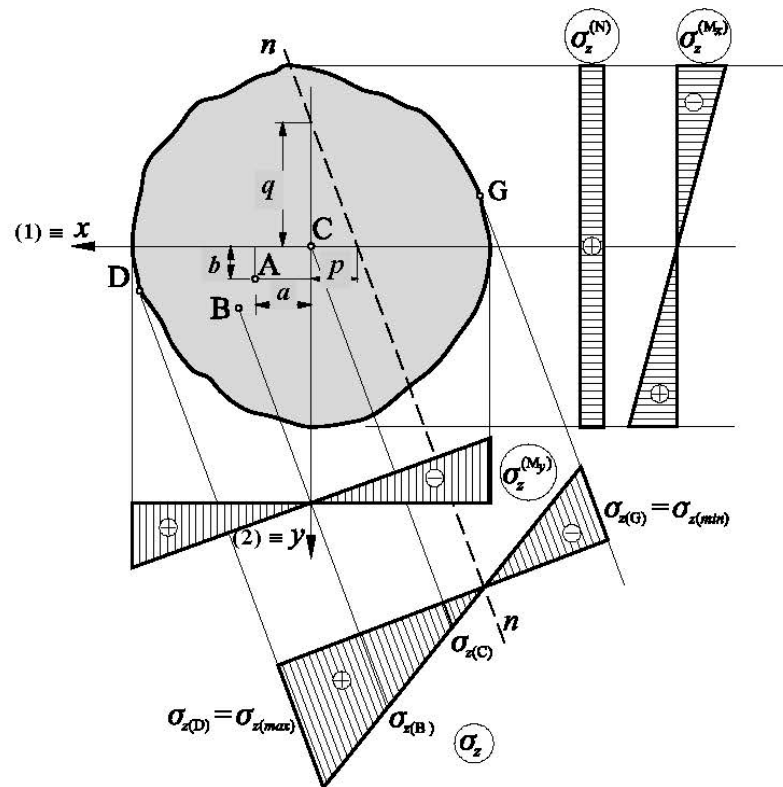
$$\text{Tačka } G(x_G, y_G) \quad \sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_G}{i_x^2} + \frac{a \cdot x_G}{i_y^2} \right)$$

Napon u težištu poprečnog presjeka

$$\sigma_{z(C)} = \frac{N}{A}$$

Napon u proizvoljnoj tački B (x_B, y_B)

$$\sigma_{z(B)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{a \cdot x_B}{i_y^2} \right)$$

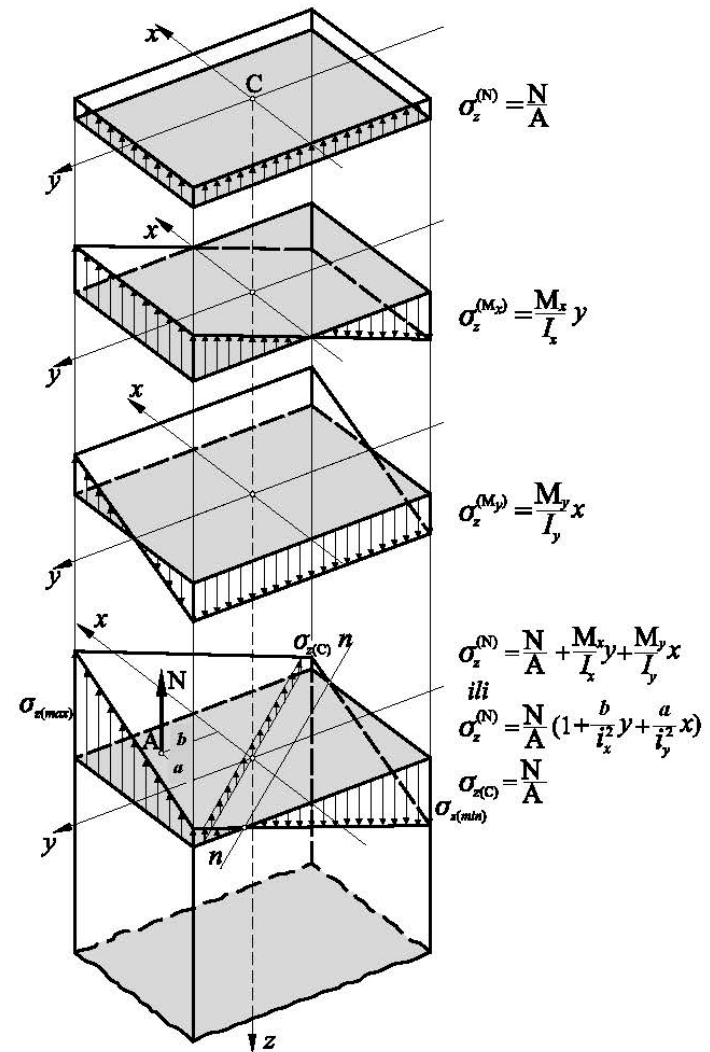
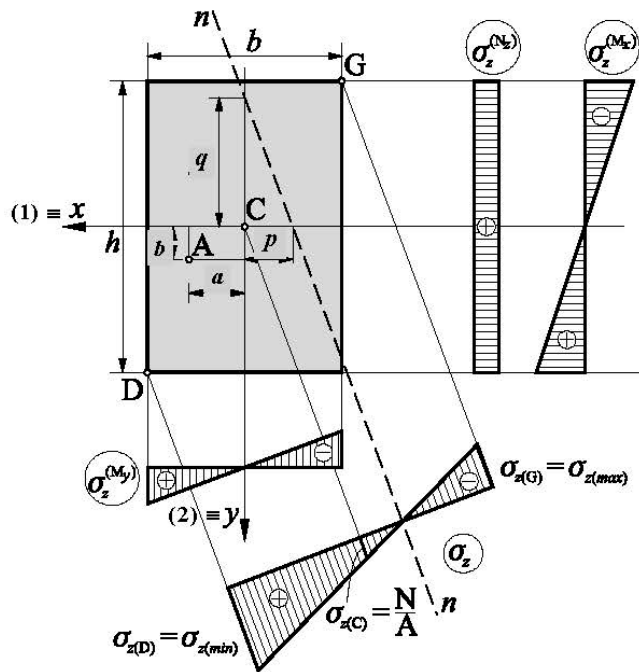


1. OPŠTI SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA

Dvoosno simetrični presjeci

(Pravougaoni poprečni presjek)

$$\sigma_{z(D,G)} = \sigma_{z(max,min)} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$



2. POSEBAN SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA NAPADNA TAČKA NA „X=(1)“ OSI

Normalni naponi

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{a \cdot x_B}{i_x^2} \right) \quad (b = 0) \rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{a \cdot x}{i_y^2} \right)}$$

Neutralna osa

$$\boxed{p = -\frac{i_y^2}{a}; \quad q = -\infty}$$

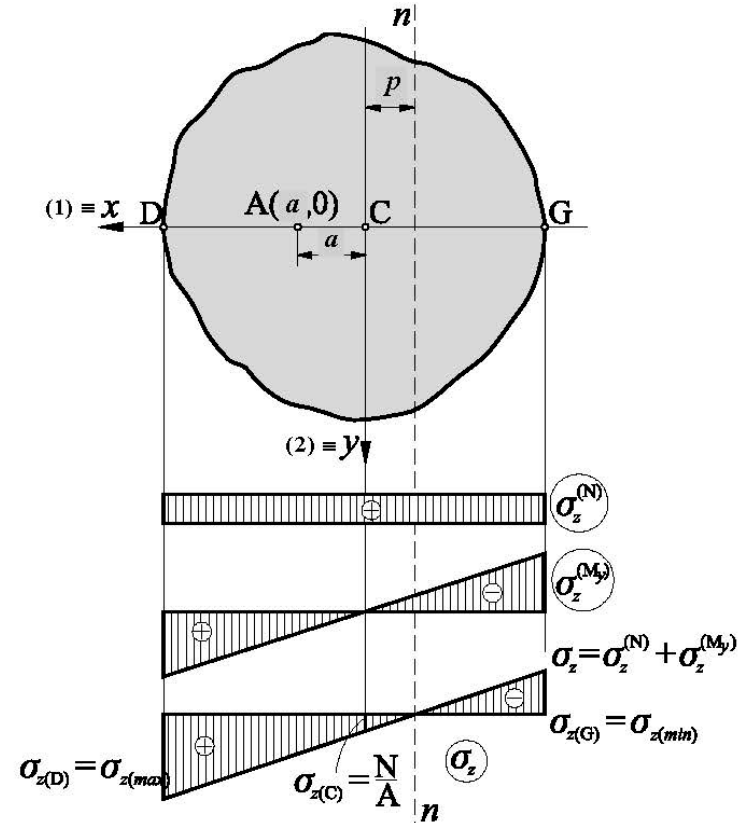
Ekstremni normalni naponi

Tačka D($x_D, 0$) $\sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{a \cdot x_D}{i_y^2} \right)$

Tačka G($x_G, 0$) $\sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{a \cdot x_G}{i_y^2} \right)$

Dvoosno simetrični presjeci

$$\boxed{\sigma_{z(max,min)} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}}$$



3. POSEBAN SLUČAJ EKSCENTRIČNOG NAPREZANJA NAPADNA TAČKA NA „Y=(2)“ OSI

Normalni naponi

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{a \cdot x_B}{i_x^2} \right) \quad (a = 0) \rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y}{i_x^2} \right)}$$

Neutralna osa

$$\boxed{p = -\infty; \quad q = -\frac{i_x^2}{b}}$$

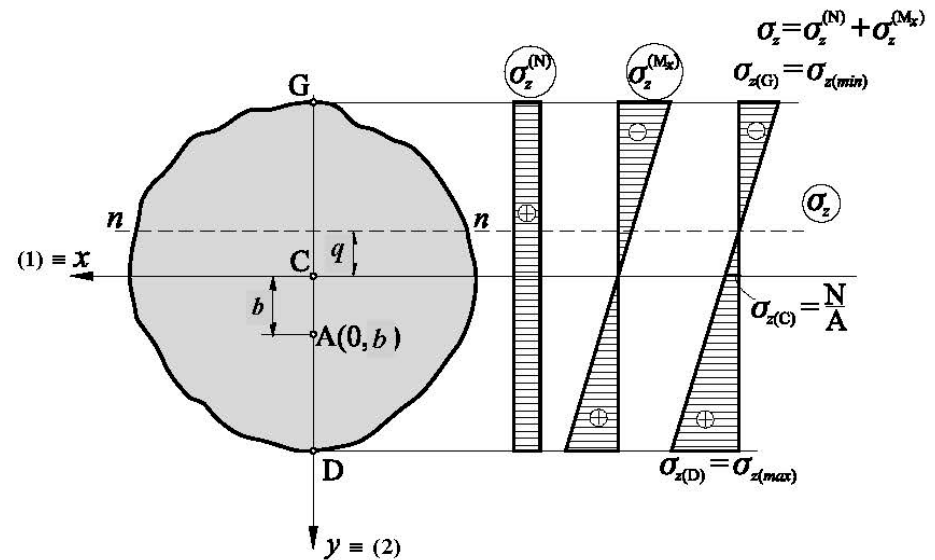
Ekstremni normalni naponi

Tačka D(0, y_D) $\sigma_{z(D)} = \sigma_{z(max)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_D}{i_x^2} \right)$

Tačka G(0, y_G) $\sigma_{z(G)} = \sigma_{z(min)} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{b \cdot y_G}{i_x^2} \right)$

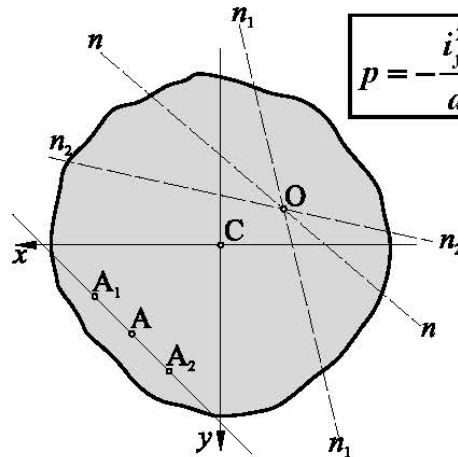
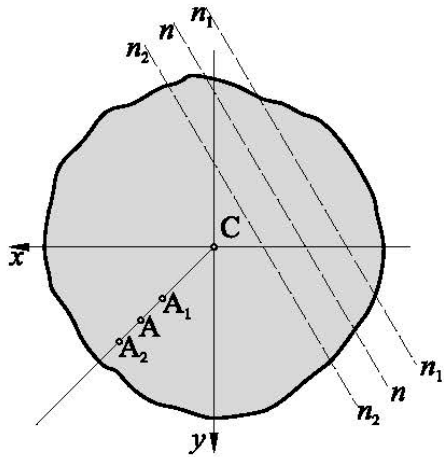
Dvoosno simetrični presjeci

$$\boxed{\sigma_{z(max,min)} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x}}$$

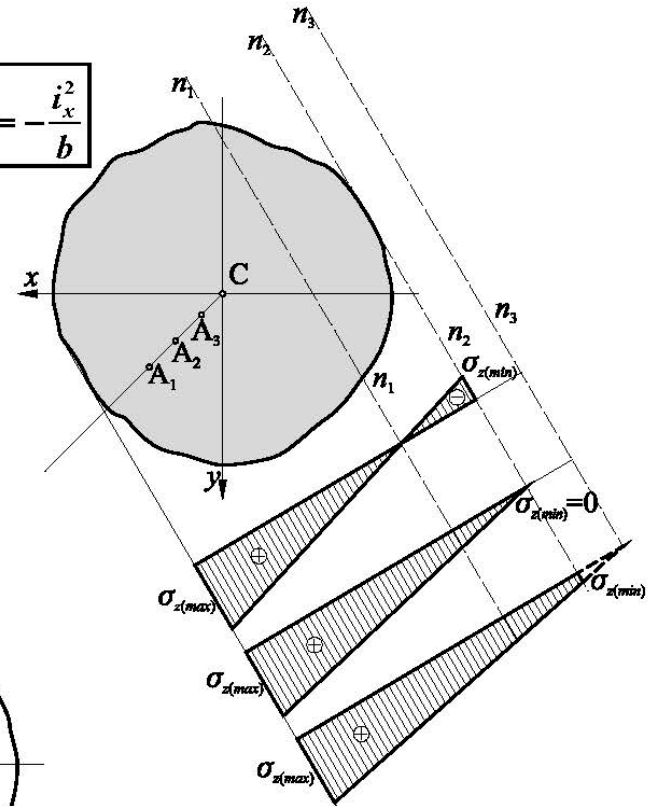


4. JEZGRO PRESJEKA

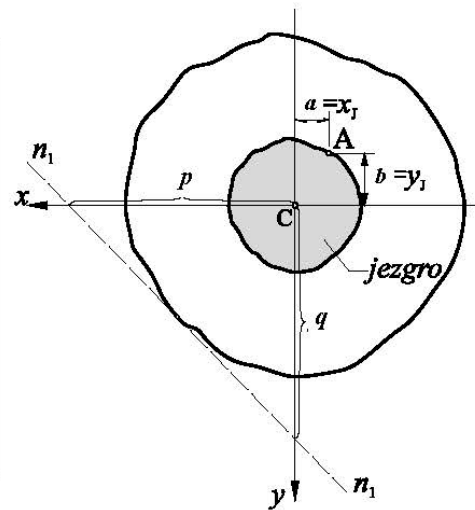
Zavisnost između položaja napadne tačke sile i položaja neutralne ose



$$p = -\frac{i_y^2}{a} \quad q = -\frac{i_x^2}{b}$$



Jezgrom presjeka se naziva dio površine poprečnog presjeka grede u okolini težišta, ograničen zatvorenom konturom, sa svojstvom da se pri dejstvu spoljašnje ekscentrične podužne sile unutar tog dijela presjeka ili na njegovoj konturi, u svim tačkama poprečnog presjeka štapa javljaju normalni naponi istog predznaka.



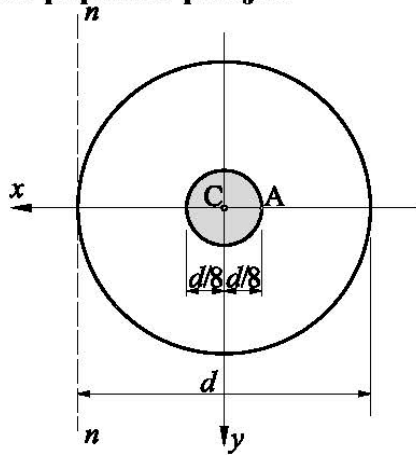
$$p = -\frac{i_y^2}{a}; \quad a = x_J = -\frac{i_y^2}{p}$$

$$q = -\frac{i_x^2}{b}; \quad b = y_J = -\frac{i_x^2}{q}$$

4. JEZGRO PRESJEKA

PRIMJERI KRUŽNOG I PRAVOUGAONOG POPREČNOG PRESJEKA

Kružni poprečni presjek



Geometrijske karakteristike presjeka:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi d^4}{64}$$

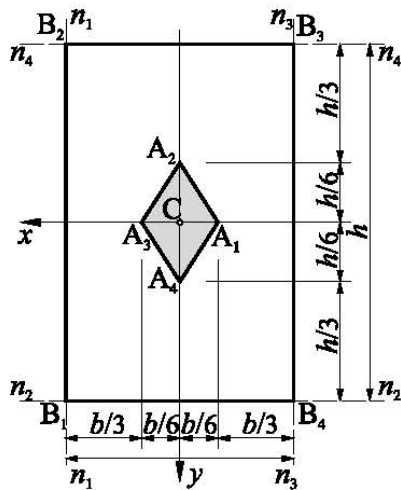
$$i_x^2 = i_y^2 = i^2 = \frac{d^2}{16}$$

Tačke na jezgru:

$$p = \frac{d}{2} \rightarrow x_J = -\frac{i_y^2}{p} = -\frac{\frac{d^2}{16}}{\frac{d}{2}} = -\frac{d}{8}$$

$$q = \infty \rightarrow y_J = -\frac{i_x^2}{q} = -\frac{\frac{d^2}{16}}{\infty} = 0$$

Pravougaoni poprečni presjek



Geometrijske karakteristike presjeka:

$$A = bh$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$i_x^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12}$$

Tačke na jezgru:

$$n_1 - n_1: p_1 = \frac{b}{2} \rightarrow x_{J1} = -\frac{i_y^2}{p_1} = -\frac{b}{6}$$

$$q_1 = \infty \rightarrow y_{J1} = -\frac{i_x^2}{q_1} = 0$$

$$n_2 - n_2: p_2 = \infty \rightarrow x_{J2} = -\frac{i_y^2}{p_2} = 0$$

$$q_2 = \frac{h}{2} \rightarrow y_{J2} = -\frac{i_x^2}{q_2} = -\frac{h}{6}$$

$$A_1 \left(-\frac{b}{6}, 0 \right)$$

$$A_2 \left(0, -\frac{h}{6} \right)$$

5. NORMALNI NAPONI PRI OTVARANJU SPOJNICE

Primjeri u praksi:

1. Nosači izrađeni od materijala koji „slabo“ primju zatezanje (opeka, kamen, nearmirani beton i sl.) izloženi dejstvu ekscentrične sile van jezgra presjeka
2. Temeljna spojnica – kontaktna spojnica između nosača i tla

Dolazi do preraspodjele normalnih napona pri čemu se naponi zatezanja isključuju, a naponi pritiska se povećavaju

Posmatramo nosač **pravougaonog poprečnog presjeka** ($e > h/6$)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{a \cdot x}{i_y^2} \right); \quad a = e; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12}; \quad x = \pm \frac{h}{2}$$

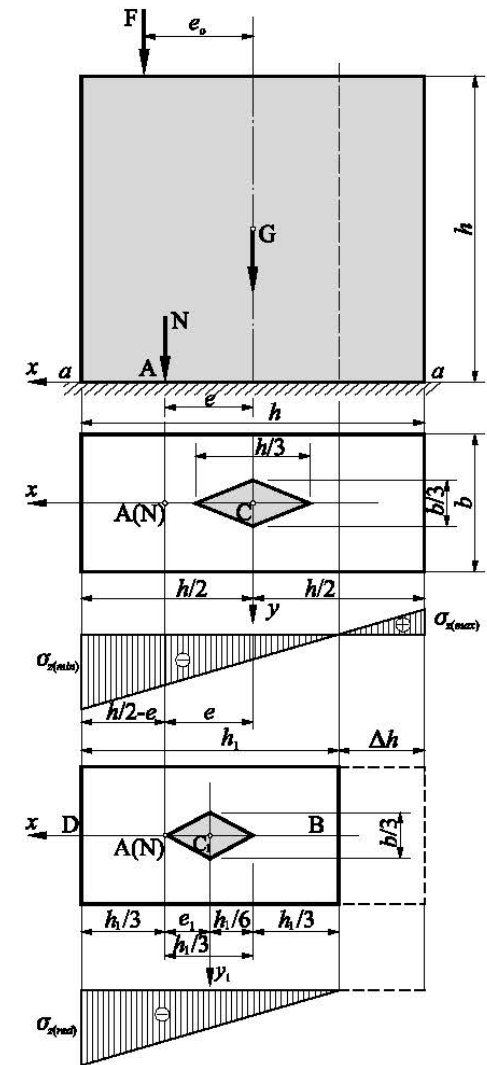
$$\sigma_{z(max,min)} = -\frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right) \quad \left[\sigma_{z(min)} = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) < 0 \right] \quad \left[\sigma_{z(max)} = -\frac{N}{A} \left(1 - \frac{6e}{h} \right) > 0 \right]$$

$$N = F + G \quad N \cdot e = F \cdot e_0 \quad \rightarrow \quad e = \frac{F \cdot e_0}{N}$$

Aktivni dio presjeka ostaje $h_1 \times b$, dok se dio $\Delta h \times b$ isključuje

$$\frac{h}{2} - e = \frac{h_1}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{h_1 = \frac{3}{2}h - 3e} \quad \text{- teorijski rješenje je moguće ako je } h_1 > 0, \text{ tj } e < h/2$$

$$\sigma_{z(max,min)} = -\frac{N}{b h_1} \left(1 \pm \frac{6e_1}{h_1} \right) \quad e_1 = \frac{h_1}{6} \quad \boxed{\sigma_{z(min)} = \sigma_{z(red)} = -\frac{2N}{b h_1}} \quad \boxed{\sigma_{z(max)} = 0}$$



5. NORMALNI NAPONI PRI OTVARANJU SPOJNICE

Primjer 1

Za zadati betonski stub pravougaonog poprečnog presjeka izvršiti kontrolu normalnih napona u temeljnoj spojnici ako je dopušteni napon pritiska u temeljnom tlu $\sigma_{dt} = 0.45 \text{ MPa}$. Nacrtati dijagram normalnih napona. Zapreminska težina betona je $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$.

Rješenje:

$$F = 20 \text{ kN} \quad e_{F,x} = 15 \text{ cm}$$

$$H = 200 \text{ cm} \quad b/h = 30 \times 50 \text{ cm}$$

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3 \quad G = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 24 = 7.20 \text{ kN}$$

$$\Sigma Z = 0 \quad N = -F - G = -27.2 \text{ kN}$$

$$M_M^{(C)} = 0 \quad Ne = F e_F \quad e = \frac{F}{N} e_F = 11.03 \text{ cm}$$

$$\sigma_{z(\min, \max)} = -\frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right)$$

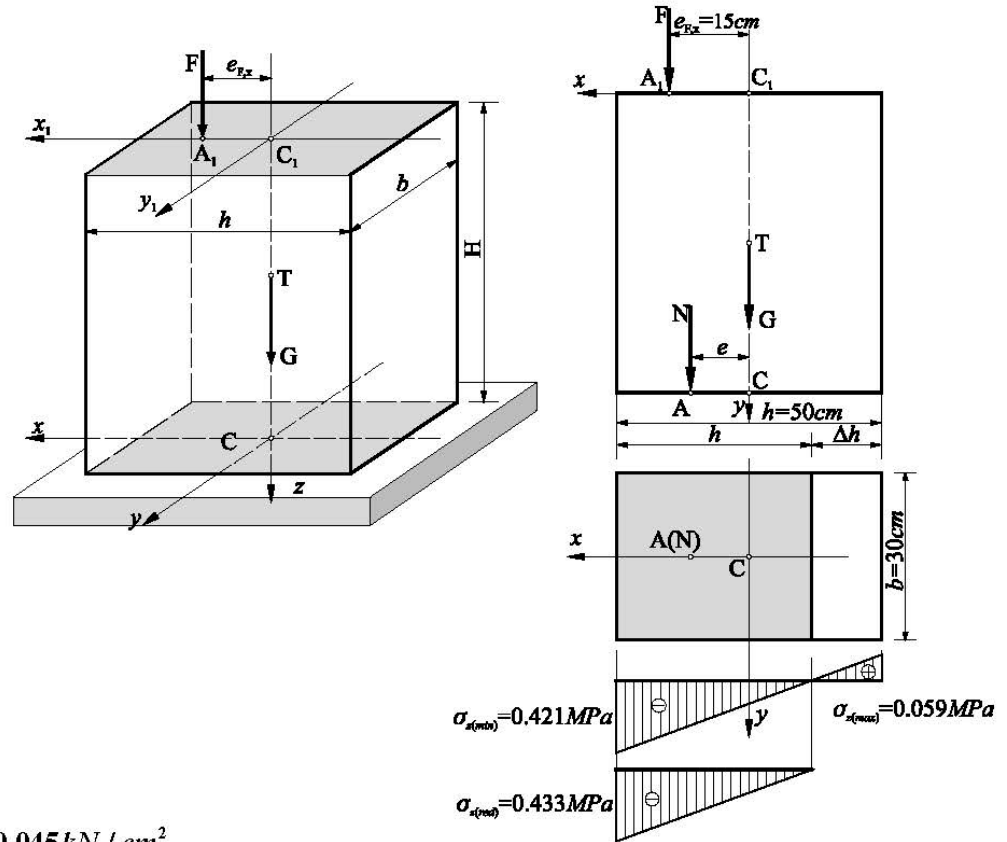
$$\sigma_{z(\min, \max)} = -\frac{27.2}{30 \cdot 50} \left(1 \pm \frac{6 \cdot 11.03}{50} \right) = -0.0181 (1 \pm 1.324)$$

$$\sigma_{z(\min)} = -0.0421 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{z(\max)} = +0.0059 \text{ kN/cm}^2 \text{ - potrebna preraspodjela}$$

$$h_1 = \frac{3}{2} h - 3e = \frac{3}{2} \cdot 50 - 3 \cdot 11.03 = 41.91 \text{ cm}$$

$$\sigma_{z(\text{red})} = -\frac{2N}{bh_1} = -\frac{2 \cdot 27.2}{30 \cdot 41.91} = -0.0433 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_d = -0.045 \text{ kN/cm}^2$$



6. DIMENZIONISANJE

$$\sigma_{z(\max)} \leq \sigma_d$$

Ako materijal ima isti dopušteni napon pri pritisku i zatezanju (σ_d)

$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} \left[1 + \frac{b}{i_x^2} y^* + \frac{a}{i_y^2} x^* \right] \leq \sigma_d$$

x^* i y^* - koordinate tačke u kojoj se javlja ekstremni napon (tačke D ili G)

Ako materijal ima različite nosivosti pri pritisku i zatezanju

$$\sigma_{z(\max)} \leq \sigma_{dz}$$

$$\sigma_{z(\min)} \leq \sigma_{dp}$$

Ako materijal ne može da primi zatezanje

$$\sigma_{z(\text{red})} \leq \sigma_d$$

$$\sigma_{z(\max)} = 0$$

Direktno dimenzionisanje nije moguće već se sprovodi iterativan postupak

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

OTPORNOST MATERIJALA I

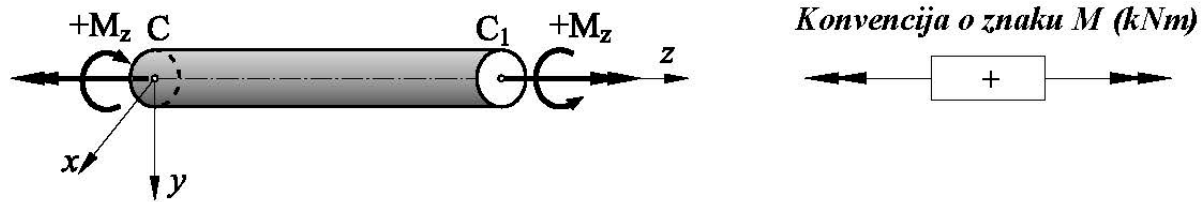
- TORZIJA -



Studijska 2022/2023 godina

1. UVOD

Torzija ili uvijanje je takav vid naprezanja pravog štapa kod koga se presječne sile svode na moment torzije koji štاپ uvija oko njegove podužne ose

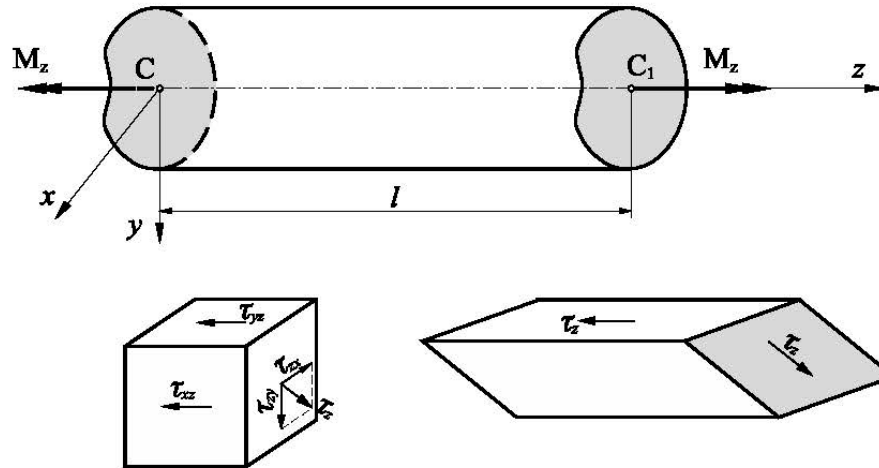


Komplikovana naponsko deformacijska analiza

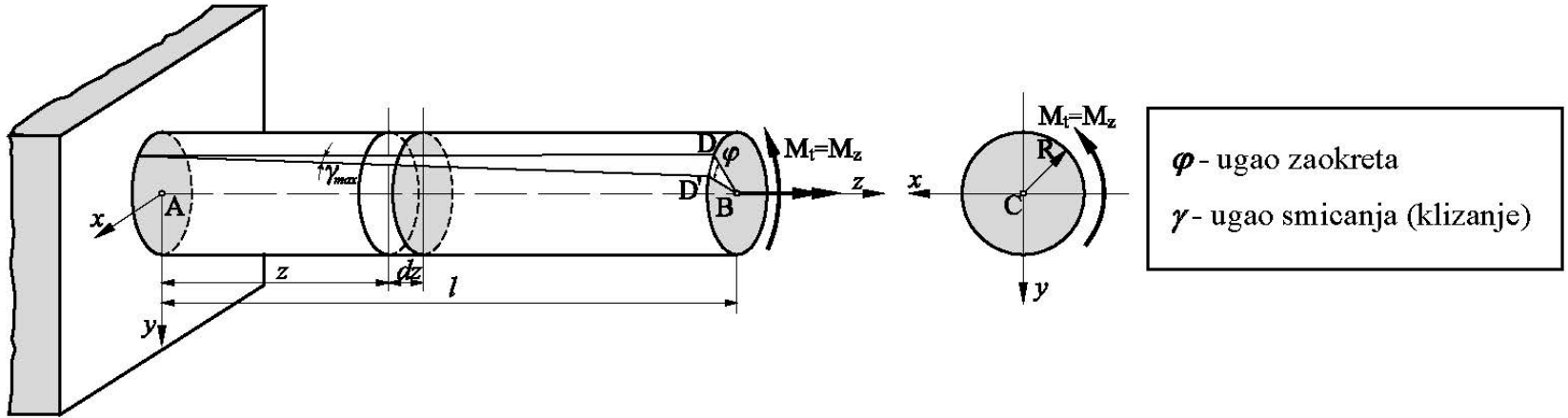
Otpornost materijala - štapovi kružnog i prstenastog poprečnog presjeka

Teorija elastičnosti u kombinaciji sa eksperimentalnom analizom – štapovi ostalih poprečnih presjeka

U tačkama poprečnog presjeka se javljaju komponentalni **smičući** naponi

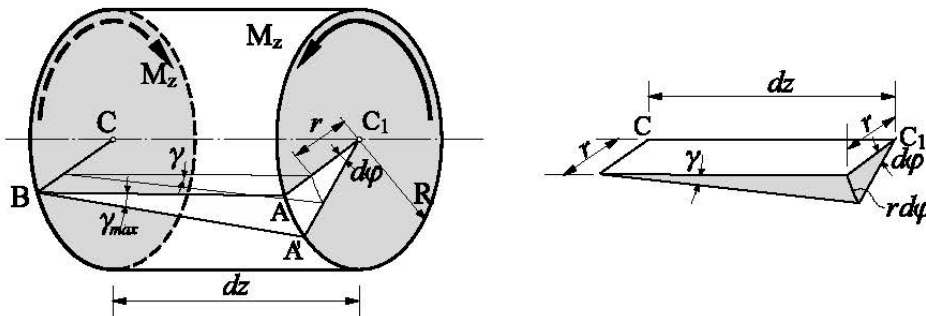


2. ŠTAPOVI KRUŽNOG I PRSTENASTOG PRESJEKA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI GREDE - ANALIZA NAPONA



Eksperimentalnim putem su potvrđene sljedeće pretpostavke:

- (1) Ravni presjeci upravni na osovinu grede ostaju ravni i upravni na osovinu grede i nakon dejstva momenta torzije
- (2) Veličina ugla smicanja (γ) linearno je proporcionalna udaljenosti od osovine grede



- (1) → u poprečnom presjeku grede izloženog torziji javljaju se samo smičući naponi koji su u skladu sa Hooke-ovim zakonom linearno proporcionalni deformaciji: $\tau = G\gamma$
- (2) → smičući naponi su linearno proporcionalna udaljenosti od težišta presjeka

2. ŠTAPOVI KRUŽNOG I PRSTENASTOG PRESJEKA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI GREDE - ANALIZA NAPONA

$$\tau = \frac{r}{R} \tau_{\max}$$

$$\text{Uslov ravnoteže } \Sigma M_z = 0 \rightarrow \int_A r \tau dA = M_z$$

$$\int_A \frac{r^2}{R} \tau_{\max} dA = M_z \rightarrow \frac{\tau_{\max}}{R} \int_A r^2 dA = M_z$$

$I_0 = \int_A r^2 dA$ - polarni moment inercije presjeka u odnosu na težište presjeka C

$$\tau_{\max} = \frac{M_z R}{I_0} = \frac{M_z}{W_0} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{M_z r}{I_0}}$$

τ - smičući napon u tački poprečnog presjeka koja je definisana sa r

M_z - je torzioni moment u posmatranom poprečnom presjeku

r - položaj posmatrane tačke ($0 \leq r \leq R$) ($R_2 \leq r \leq R_1$)

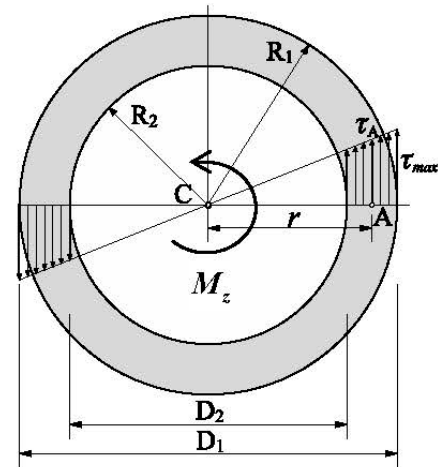
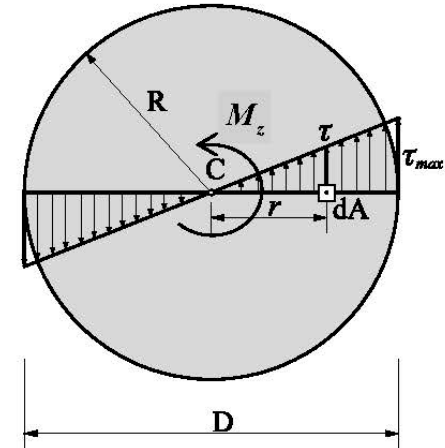
I_0 (I_T) - je polarni (ili torzioni) moment inercije presjeka u odnosu na težište

W_0 (W_T) - je polarni (ili torzioni) otporni moment ($W_0 = \frac{I_0}{R}$)

Polarni odnosno torzioni momenti inercije

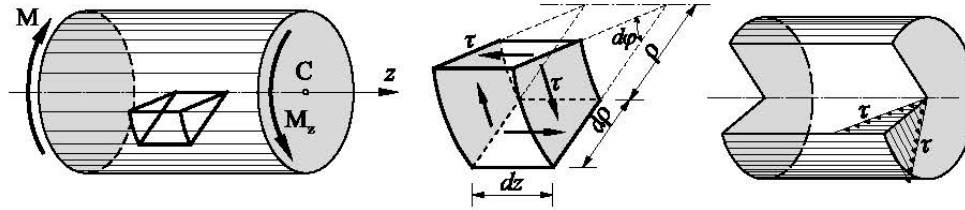
$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} \quad \left(I_0 = \frac{\pi D^4}{32} \right) \text{ - kružni poprečni presjek}$$

$$I_0 = \frac{\pi R_1^4}{2} - \frac{\pi R_2^4}{2} \quad \left(I_0 = \frac{\pi D_1^4}{32} - \frac{\pi D_2^4}{32} \right) \text{ - prstenasti poprečni presjek}$$



2. ŠTAPOVI KRUŽNOG I PRSTENASTOG PRESJEKA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI GREDE - ANALIZA NAPONA

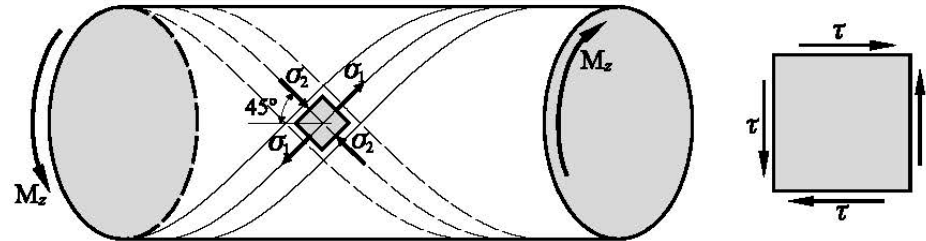
Stav o konjugovanosti smičućih napona



Glavni naponi i trajektorije glavnih napona

$$\sigma_1 = +\tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$



Tip loma krtih u duktilnih materijala izloženih torziji

krt



plastičan



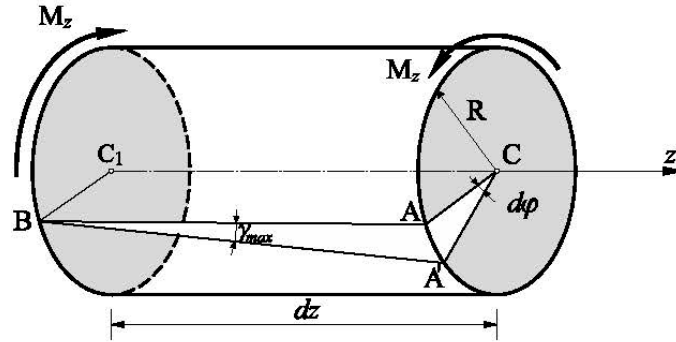
2. ŠTAPOVI KRUŽNOG I PRSTENASTOG PRESJEKA PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI GREDE - ANALIZA DEFORMACIJE

$$\gamma_{\max} dz = d\varphi R$$

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} \text{ - Hooke-ov zakon}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z R}{I_0}$$

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_0} dz$$



$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_0} dz \text{ - opšti izraz za proračun ugla zaokreta ili uvijanja}$$

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_0} \text{ - za } M_z = \text{const i } GI_0 = \text{const}$$

Analogija sa aksijalnim naprezanjem

$$\Delta = \int_0^l \frac{N}{EA} dz$$

$$\Delta = \frac{Nl}{EA} \text{ za } N = \text{const i } EA = \text{const}$$

$k = \frac{GI_0}{l}$ - **torziona krutost štapa (Nm)** - moment torzije koji je potreban da uvije štap za jedinačni ugao (jedan radijan)

$$\varphi = \frac{M_z}{k} \rightarrow k = M_z \cdot \varphi$$

2. ŠTAPOVI KRUŽNOG I PRSTENASTOG PRESJEKA

PREMA ELEMENTARNOJ TEORIJI GREDE - RAČUNSKI PRIMJER

Primjer 1.

Za nosač stepenasto-promjenjivog kružnog presjeka nacrtati dijagram ekstremnih tangencijalnih napona duž nosača i sračunati ugao uvijanja na slobodnom kraju ako je $G=8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Rješenje:

Dio BC: $I_0^{BC} = \frac{d_1^4 \pi}{32} = 61.33 \text{ cm}^4$

$$W_0^{BC} = \frac{I_0^{BC}}{d_1/2} = 24.53 \text{ cm}^3$$

Dio CD: $I_0^{CD} = \frac{d_2^4 \pi}{32} = 401.92 \text{ cm}^4$

$$W_0^{CD} = \frac{I_0^{CD}}{d_2/2} = 100.48 \text{ cm}^3$$

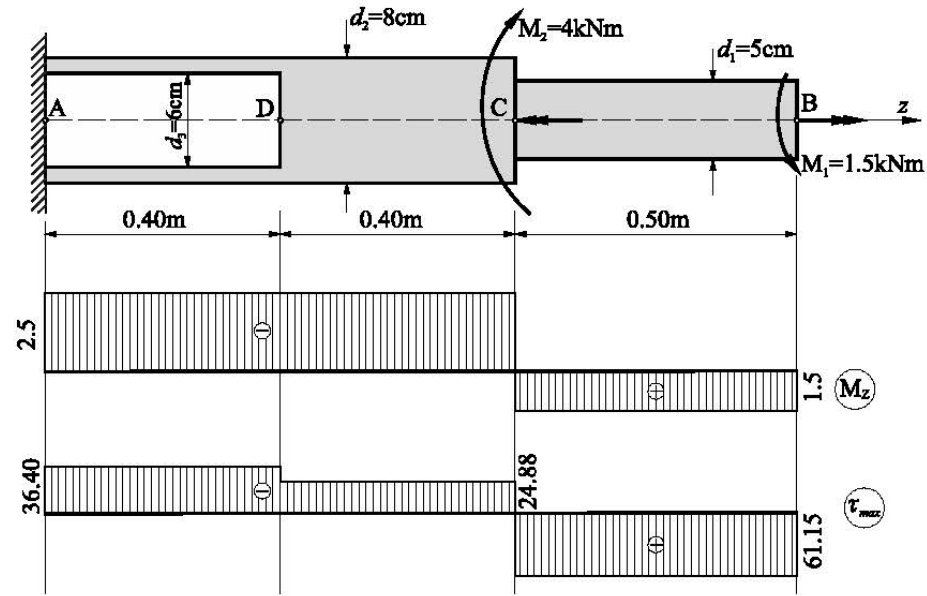
Dio DA: $I_0^{DA} = \frac{d_2^4 \pi}{32} - \frac{d_3^4 \pi}{32} = 274.75 \text{ cm}^4$

$$W_0^{DA} = \frac{I_0^{DA}}{d_2/2} = 68.69 \text{ cm}^3$$

Dio BC: $\tau_{max}^{(BC)} = \frac{M_z^{BC}}{W_0^{BC}} = \frac{1.5 \cdot 10^2}{24.53} = 6.115 \text{ kN/cm}^2$

Dio CD: $\tau_{max}^{(CD)} = \frac{M_z^{CD}}{W_0^{CD}} = \frac{-2.5 \cdot 10^2}{100.48} = -2.488 \text{ kN/cm}^2$

Dio DA: $\tau_{max}^{(DA)} = \frac{M_z^{DA}}{W_0^{DA}} = \frac{-2.5 \cdot 10^2}{68.69} = -3.640 \text{ kN/cm}^2$

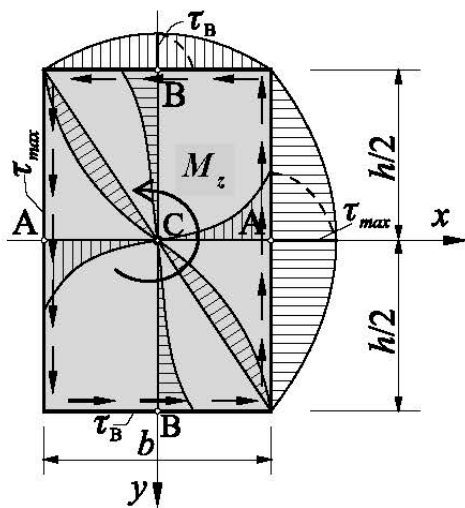


$$\varphi_{BA} = \sum_{i=1}^3 \frac{M_{zi} l_i}{GI_{0i}} = \frac{M_z^{BC} l_{BC}}{GI_0^{BC}} + \frac{M_z^{CD} l_{CD}}{GI_0^{CD}} + \frac{M_z^{DA} l_{DA}}{GI_0^{DA}}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{1.5 \cdot 10^2 \cdot 0.50}{8 \cdot 10^3 \cdot 61.33} - \frac{2.5 \cdot 10^2 \cdot 0.40}{8 \cdot 10^3 \cdot 401.92} - \frac{2.5 \cdot 10^2 \cdot 0.40}{8 \cdot 10^3 \cdot 274.75} =$$

$$= 15.286 \cdot 10^{-3} - 3.110 \cdot 10^{-3} - 4.550 \cdot 10^{-3} = 7.626 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.437^\circ$$

3. ŠTAPOVI PRAVOUGAONOG POPREČNOG PRESJEKA



$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_z}{W_0} - \text{max napon djeluje u polovinama } \mathbf{du\zeta}ih \text{ stranica}$$

$$\tau_B = \gamma \cdot \tau_{max} - \text{napon u polovinama } \mathbf{kra\check{c}ih} \text{ stranica}$$

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_0} - \text{ugao uvijanja}$$

$$I_0 = \alpha \cdot b^4$$

$$W_0 = \beta \cdot b^3 - \text{geometrijske karakteristike u funkciji od } h/b$$

h/b	α	β	γ
1.0	0.140	0.208	1.000
1.5	0.294	0.346	0.859
2.0	0.457	0.493	0.795
3.0	0.790	0.801	0.753
4.0	1.123	1.150	0.745
10	3	3	0.742
∞	3	3	0.742

4. ŠTAPOVI OTVORENIH TANKOZIDNIH PRESJEKA

TANKOZIDNI PRAVOUGAONI PRESJEK
($h/b > 10$)

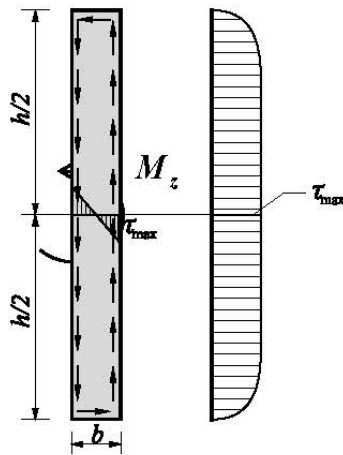
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_0} = \frac{M_z}{\beta b^3} = \frac{M_z}{\frac{h}{3b^3} \cdot \frac{b}{10}} = \frac{M_z}{\frac{1}{3} b^2 h}$$

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_0} = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot \alpha b^3} = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot 3b^4} = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot \frac{1}{3} b^3 h}$$

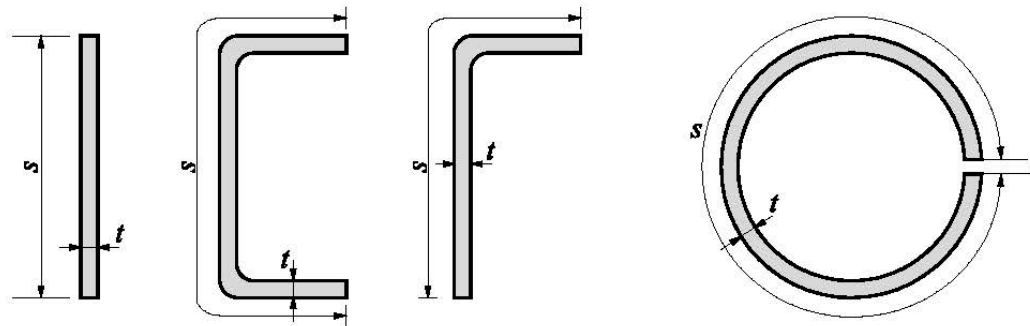
$$I_0 = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$W_0 = \frac{I_0}{b}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_0} b$$



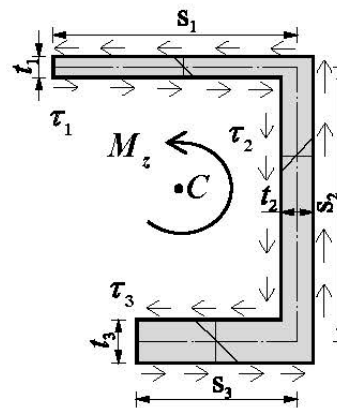
OPŠTI SLUČAJ OTVORENOG TANKOZIDNOG PRESJEKA



$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_0}; W_0 = \frac{1}{3} s t^2$$

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_0}; I_0 = \frac{1}{3} s t^3$$

Slučaj kada su zidovi različitih debljina t_i



$$\tau_{i,\max} = \frac{M_z}{I_0} \cdot t_i = \frac{M_z}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3} \cdot t_i$$

$$I_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3$$

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_0}$$

$$\tau_{\max} \leftrightarrow t_{\max}$$

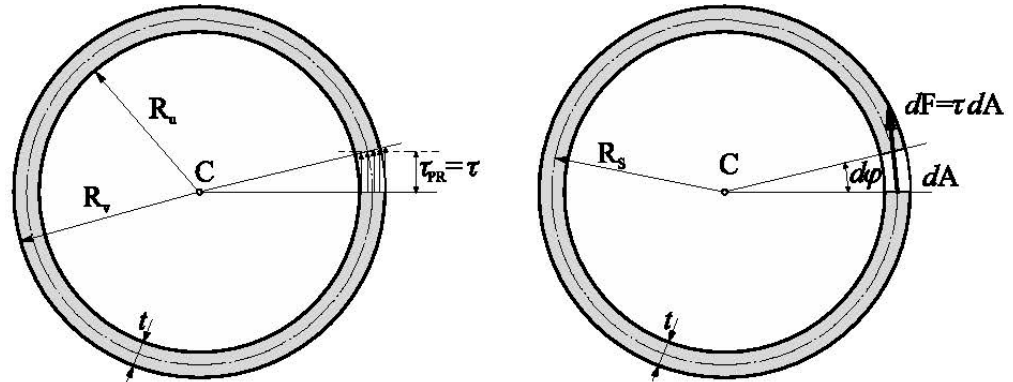
5. ŠTAPOVI ZATVORENIH TANKOZIDNIH PRESJEKA

$$M_z = \int_A R_s dF = \int_A R_s \tau dA$$

$$dA = R_s d\varphi t$$

$$M_z = \int_0^{2\pi} R_s^2 \cdot \tau \cdot t \cdot d\varphi = 2\pi \cdot R_s^2 \cdot t \cdot \tau = 2A_s \cdot t \cdot \tau$$

$A_s = R_s^2 \pi$ - površina ograničena srednjom linijom zida **kružnog** presjeka



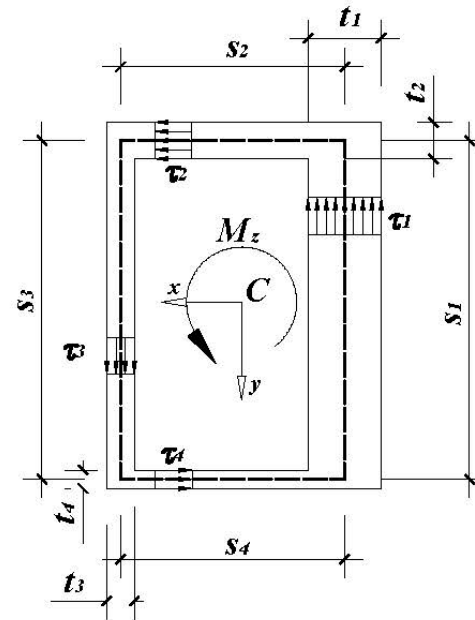
$$\tau = \frac{M_z}{2A_s t} = \frac{M_z}{W_0}$$

Može se pokazati da ovaj izraz važi i za slučaj proizvoljnog oblika zatvorenog poprečnog presjeka

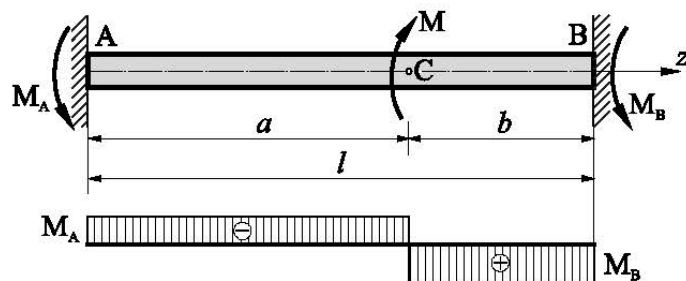
Različito $t_i \rightarrow \tau_i = \frac{M_z}{2A_s t_i} \rightarrow \tau_{\max} \leftrightarrow t_{\min}$

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_0} \quad I_0 = \frac{4A_s^2}{\sum_i \frac{s_i}{t_i}}$$

$A_s = s_1 \cdot s_2$ za slučaj prikazane pravougaone cijevi



6. STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI



1 x statički neodreden problem

(1) Uslov ravnoteže $\Sigma M_z = 0 \rightarrow M_A + M_B - M = 0$

(2) Deformacijski uslov $\varphi_{BA} = \varphi_{BC} + \varphi_{CA} = 0 \rightarrow \frac{M_B b}{GI_0} + \frac{(-M_A) a}{GI_0} = 0 \rightarrow M_B = M_A \frac{a}{b}$

Iz (1) i (2) \rightarrow

$$M_A = M_z \frac{b}{l}$$
$$M_B = M_z \frac{a}{l}$$

7. RAČUNSKI PRIMJERI

Primjer 2.

Dimenzionisati zadati konzolni štap opterećen torzionim momentom $M_z = 20 \text{ kNm}$ ako je izrađen od čelika sa dopuštenim smičućim naponom $\tau_d = 110 \text{ MPa}$. Konzolu dimenzionisati kao kružni i kao prstenasti presjek ako je $R_2 = 0.9R_1$. Nakon dimenzionisanja odrediti ugao uvijanja krajnjeg poprečnog presjeka u odnosu na uklještenje ako je $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Analizirati utrošak materijala u jednom i drugom slučaju i veličinu ugla uvijanja.

Rješenje:

$$\boxed{|\tau|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_0} \leq \tau_d} \rightarrow W_0 \geq \frac{|M_z|_{\max}}{\tau_d} = \frac{20 \cdot 10^2}{11} = 181.82 \text{ cm}^3$$

Kružni presjek

$$W_0 = \frac{I_0}{R} = \frac{2}{R} = \frac{\pi R^3}{2} \rightarrow R \geq \sqrt[3]{\frac{2W_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 181.82}{\pi}} \geq 4.874 \text{ cm}$$

Usvojeno: $R = 5.0 \text{ cm}$

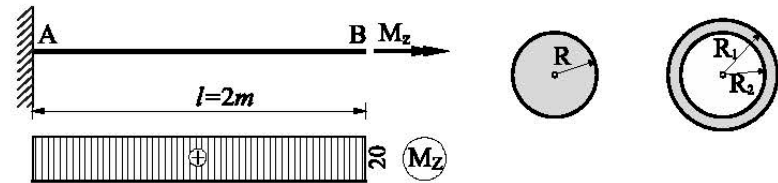
$$A_{\text{kružni}} = R^2 \pi = 78.5 \text{ cm}^2$$

$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} = 981.74 \text{ cm}^4$$

$$\varphi_{BA}^{\text{kružni}} = \frac{M_z l}{GI_0} = \frac{20 \cdot 10^2 \cdot 200}{8 \cdot 10^3 \cdot 981.74} = 0.051 \text{ rad} = 2.92^\circ$$

$$A_{\text{kružni}} / A_{\text{prsten}} = 78.5 / 29.29 = 2.69$$

$$\varphi_{BA}^{\text{kružni}} / \varphi_{BA}^{\text{prsten}} = 2.92^\circ / 2.21^\circ = 1.32 \rightarrow \text{KRUŽNI PRESJEK JE NEEKONOMIČAN}$$



Prstenasti presjek

$$I_0 = \frac{R_1^4 \pi}{2} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right] = \frac{R_1^4 \pi}{2} [1 - (0.9)^4] = 0.540 R_1^4$$

$$W_0 = \frac{I_0}{R} = \frac{0.540 R_1^4}{R_1} = 0.540 R_1^3 \rightarrow R_1 \geq \sqrt[3]{\frac{W_0}{0.540}} = 6.957 \text{ cm}$$

Usvojeno: $R_1 = 7.0 \text{ cm}$ a $R_2 = 0.9R_1 = 6.3 \text{ cm}$

$$A_{\text{prsten}} = R_1^2 \pi - R_2^2 \pi = 7^2 \pi - 6.3^2 \pi = 29.23 \text{ cm}^2$$

$$I_0 = 0.540 \cdot 7^4 = 1296.54 \text{ cm}^4$$

$$\varphi_{BA}^{\text{prsten}} = \frac{M_z l}{GI_0} = \frac{20 \cdot 10^2 \cdot 200}{8 \cdot 10^3 \cdot 1296.54} = 0.0386 \text{ rad} = 2.21^\circ$$

7. RAČUNSKI PRIMJERI

Primjer 3.

Odrediti koliki torzioni moment može da primi kružna cijev tankih zidova $t=5\text{mm}$ i spoljašnjeg poluprečnika $R=100\text{mm}$ ako je dopušteni napon $\tau_d = 110\text{MPa}$. Takođe odrediti koliki moment torzije može da prenese ova ista cijev u slučaju da je rasječena duž izvodnice

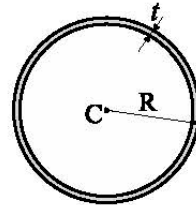
Rješenje:

Torziona nosivost cijevi (M_z^{cijev})

$$\tau = \frac{M_z}{2A_s \cdot t} = \tau_d \rightarrow M_z = 2A_s \cdot t \cdot \tau_d$$

$$A_s = \left(R - \frac{t}{2}\right)^2 \pi = 298.5\text{cm}^2$$

$$M_z^{\text{cijev}} = 2 \cdot 298.5 \cdot 5 \cdot 11 = 3285\text{kNcm} = 32.85\text{kNm}$$



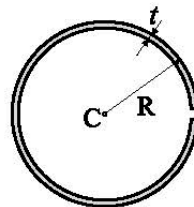
Torziona nosivost rasječene cijevi ($M_z^{\text{rasjecene cijev}}$)

$$\tau_i = \frac{M_z}{I_0} \cdot t_i = \frac{M_z}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3} \cdot t_i \quad (t_i = \text{const})$$

$$I_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot R_s \cdot t^3$$

$$W_0 = \frac{I_0}{t} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot R_s \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(R - \frac{t}{2}\right) \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(10 - \frac{0.5}{2}\right) \cdot 0.5^2 = 5.1\text{cm}^3$$

$$M_z^{\text{rasjecene cijev}} = W_0 \cdot \tau_d = 5.1 \cdot 11 = 56.1\text{kNcm} = 0.56\text{kNm}$$



$$M_z^{\text{cijev}} / M_z^{\text{rasjecene cijev}} = 32.85 / 0.56 = 59$$

Nosivost cijevi na torziju rasijecanjem po izvodnici opala za oko **59** puta u odnosu na nerasječenu cijev.

Na osnovu prethodnog se može zaključiti da su otvoreni presjeci nepovoljni za izradu štapova izloženih torziji. Takođe treba voditi računa da bilo kakve pukotine u podužnom pravcu znatno umanjuju nosivost i mogu izazvati nagli lom.

UNIVERZITET CRNE GORE - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Prof. dr Milivoje ROGAČ

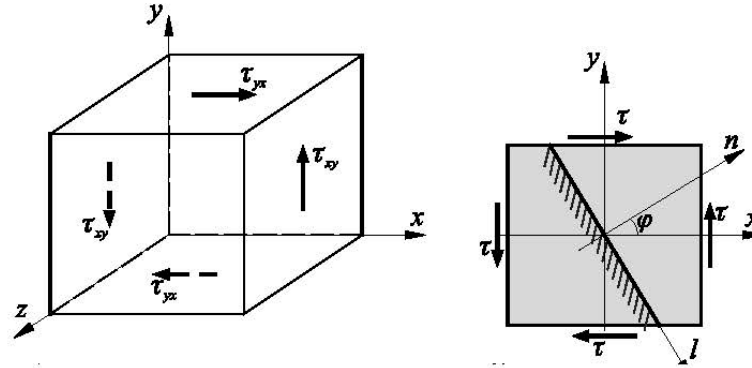
OTPORNOST MATERIJALA I

- ČISTO SMICANJE -



Studijska 2022/2023 godina

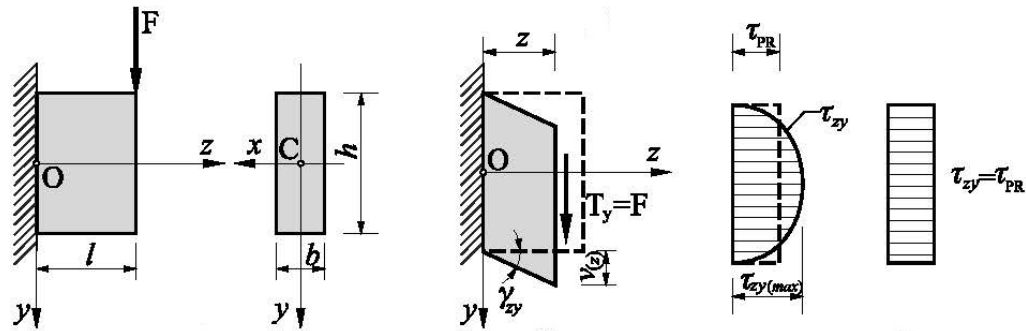
1. UVOD



ELEMENTI NAPREGNUTI NA ČISTO SMICANJE:

- ŠTAPOVI IZLOŽENI TORZIJI
- KRATKE GREDE
- SPOJNA SREDSTVA U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA (ZAVRTNJI I ZAKIVCI)
- VAROVI (ŠAVOVI) U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA
- ELEMENTI DRVENIH KONSTRUKCIJA I DR

2. KRATKA GREDA



$$T_y = \tau_{pr} A$$

$$\tau_{pr} = \frac{T_y}{A} \quad (A - \text{površina poprečnog presjeka grede})$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{T_y}{GA} \quad (G \text{ modul smicanja ili modul klizanja})$$

$$v_{(z)} = \gamma_{zy} z = \frac{T_y}{GA} z \quad - \text{ugib grede (kod kratkih greda } T \text{ utiče na ugib; kod dugih je uticaj } T \text{ na ugib zanemariv OM2)}$$

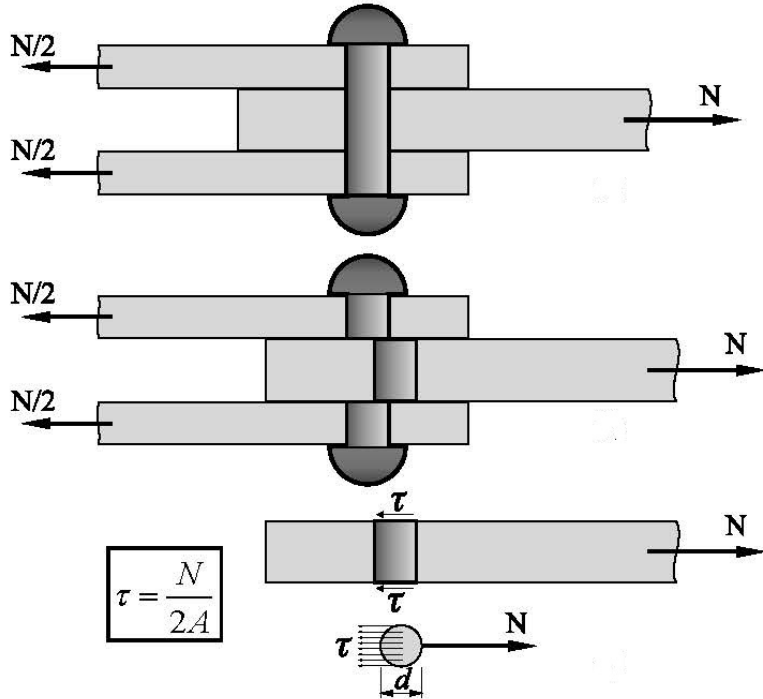
$$v_{(\max)} = \frac{T_y l}{GA} \quad - \text{maksimalni ugib za } z=l$$

Dimenzionisanje pri čistom smicanju grede vrši se na osnovu uslova:

$$\tau_{zy} \leq \tau_d \quad \rightarrow \quad A_{pot} \geq \frac{T_y}{\tau_d}$$

3. ZAKIVCI I ZAVRTNJI U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA

Dvosječni zavrtnji ($m=2$)

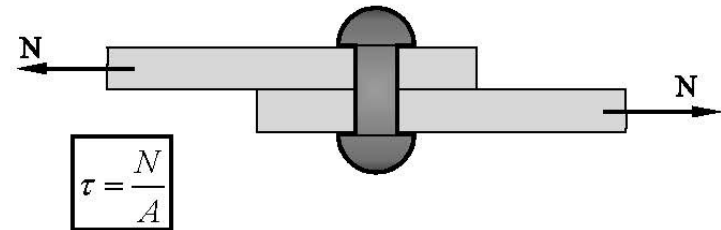


$$\tau = \frac{N}{n \cdot m \cdot A} \text{ - opšti izraz za proračun napona } \tau$$

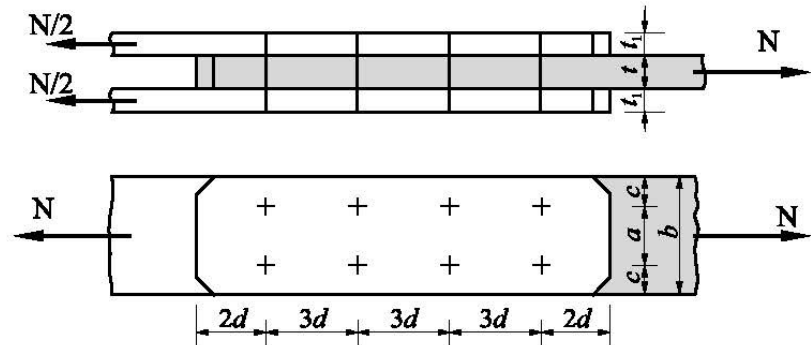
n – broj zavrtnjeva u vezi

m – sječnost zavrtnjeva

Jednosječni zavrtnji ($m=1$)

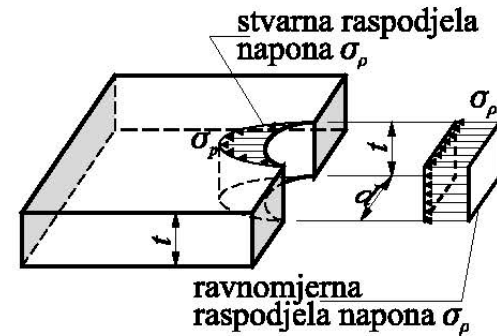
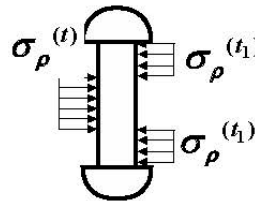
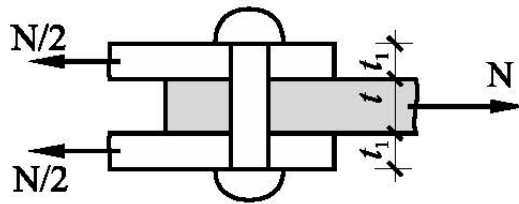


$$(A = \frac{d^2 \pi}{4} \text{ - površina vrata zavrtnja prečnika } d)$$



3. ZAKIVCI I ZAVRTNJI U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA

Pored napona smicanja u vratu zavrtnja (τ) potrebno je iskontrolisati **pritisak po opmotaču rupe** (σ_ρ) zavrtnja/zakivka koji se javlja u osnovnom materijalu



$$\sigma_\rho^{(t)} = \frac{N}{A_\rho} = \frac{N}{d \cdot t} \leq \sigma_{d\rho}$$

$$\sigma_\rho^{(t_1)} = \frac{N/2}{A_\rho} = \frac{N/2}{d \cdot t_1} = \frac{N}{d \cdot 2t_1} \leq \sigma_{d\rho}$$

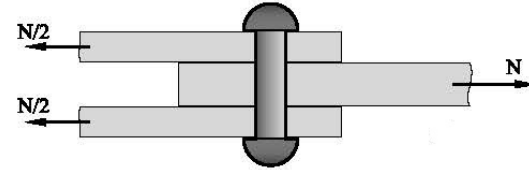
→ mjerodavan je paket limova manje debljine (t ili $2t_1$)

3. ZAKIVCI I ZAVRTNJI U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA

Primjer 1.

Određiti prečnik zakivka ($d=?$) za vezu elemenata na slici za $N = 45kN$ ako je dopušteni smičući napon za zakivke $\tau_d = 80MPa$.

Rješenje: $\tau = \frac{N}{n \cdot m \cdot A}$ ($n=1; m=2$) $\rightarrow \tau = \frac{N}{2A} = \frac{N}{2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}}$



$$\tau = \frac{2N}{d^2 \pi} \leq \tau_d \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{2N}{\pi \tau_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{3.14 \cdot 8}} = 1.893 \text{ cm}$$

Usvaja se zakivak: $d = 20mm$

Primjer 2.

Određiti potreban broj zakivaka ($n=?$) za vezu elemenata na slici koji treba da prenesu silu $N = 380kN$, ako je prečnik zakivka $d = 20mm$, $\tau_d = 80MPa$, $\sigma_{dz} = 160MPa$, $\sigma_{dp} = 320MPa$, $t_1 = 6mm$, $t = 10mm$ i $b = 280mm$.

Rješenje: $\tau = \frac{N}{n \cdot m \cdot A}$ ($n=?; m=2$) $\rightarrow \tau = \frac{N}{n \cdot 2 \cdot A} = \frac{N}{n \cdot 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}} \leq \tau_d \rightarrow n \geq \frac{2N}{d^2 \cdot \pi \cdot \tau_d} = \frac{2 \cdot 380}{2^2 \cdot \pi \cdot 8} \geq 7.56 \rightarrow$ Potreban broj zakivaka je 8

Kontrola napona na bočni pritisak po omotaču rupe:

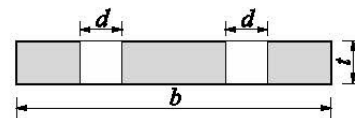
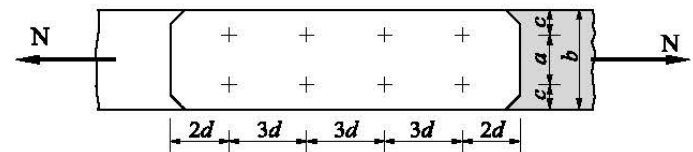
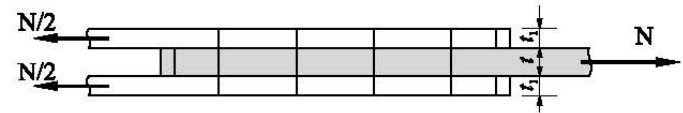
($t = 10mm < 2 \cdot t_1 = 12mm \rightarrow$ mjerodavan lim debljine t)

$$\sigma_p = \frac{N}{n \cdot d \cdot t} = \frac{380}{8 \cdot 2 \cdot 1} = 23.75 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{dp} = 320 \text{ MPa}$$

Kontrola napona zatezanja u čeličnim limovima:

(mjerodavna neto površina presjeka $A_{neto} = t(b - 2d)$)

$$\sigma_z = \frac{N}{A_{neto}} = \frac{N}{t(b - 2d)} = \frac{380}{1(28 - 2 \cdot 2)} = 15.833 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{dz} = 160 \text{ MPa}$$



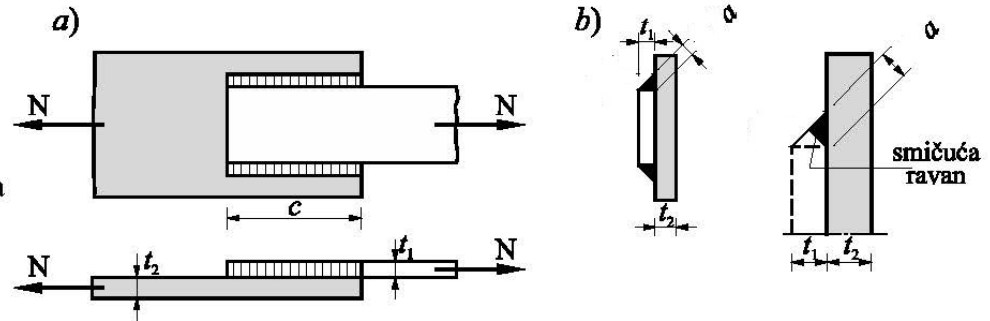
4. VAROVI (ŠAVOVI) U ČELIČNIM KONSTRUKCIJAMA

a – debljina šava

$A_{1V} = a \cdot c$ - smičuća površina jednog šava

$A_V = 2 \cdot a \cdot c$ - ukupna smičuća površina šavova

$$\tau_V = \frac{N}{A_V} = \frac{N}{2 \cdot a \cdot c} \leq \tau_d \text{ - smičući napon u šavovima}$$



Primjer 3.

Odrediti dužinu varova ($c=?$) za vezu sa slike gore, ako je veza opterećena sa silom zatezanja $N = 120kN$, debljina vara $a = 5mm$ i dopušteni napon smicanja u varu $\tau_d = 60MPa$. Odrediti širinu lima ($b_1=?$) debljine $t_1 = 8mm$ ako je dopušteni napon za zatezanje $\sigma_{dz} = 160MPa$.

Rješenje:

Širina lima b_1 :

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \leq \sigma_{dz} \quad (A = t_1 \cdot b_1)$$

$$b_1 \geq \frac{N}{t_1 \cdot \sigma_{dz}} = \frac{120}{0.8 \cdot 16} = 9.4 \text{ cm} \quad \text{Usvaja se } \underline{b_1 = 100mm}$$

Dužina vara c :

$$\tau_V = \frac{N}{A_V} = \frac{N}{2 \cdot a \cdot c} \leq \tau_d$$

$$c \geq \frac{N}{2 \cdot a \cdot \tau_{vd}} = \frac{120}{2 \cdot 0.5 \cdot 6} = 20 \text{ cm} \quad \text{Usvaja se } \underline{c = 200mm}$$

5. ELEMENTI DRVENIH KONSTRUKCIJA

$$\tau = \frac{N_H}{A_\tau} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{a \cdot b}$$

Primjer 4.

Odrediti potrebnu dužinu ($a=?$) drvenog elementa za vezu na slici ako kosnik prima silu $N = 60kN$.

Nagib kosnika je $\alpha = 45^\circ$, širina horizontalne grede $b = 140mm$.

Dopušteni smičući napon u drvetu $\tau_d^{\parallel} = 0.8MPa$.

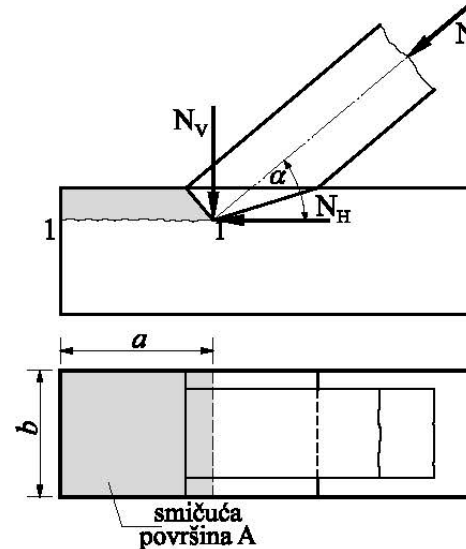
Rješenje:

Smicanje se vrši po površini $A = b \cdot a$.

$$\tau = \frac{N \cos \alpha}{A} = \frac{N \cos \alpha}{b \cdot a} \leq \tau_d^{\parallel}$$

$$a \geq \frac{N \cdot \cos \alpha}{b \cdot \tau_d^{\parallel}} = \frac{60 \cdot \cos 45^\circ}{14 \cdot 0.08} = 37.9 \text{ cm}$$

Usvojeno $a = 380mm$



$$N_H = N \cos \alpha$$

$$N_V = N \sin \alpha$$

5. ELEMENTI DRVENIH KONSTRUKCIJA

Primjer 5.

Dimenzionirati drvenu gredu pravougaonog poprečnog presjeka širine $b = 12\text{cm}$, koja je urađena od četinarskog drveta I klase i izložena dejstvu sile $N = 70\text{kN}$, i njen nastavak ako je dopušteni napon na zatezanje drveta $\sigma_{dz} = 10\text{MPa}$, dopušteni smičući napon paralelno vlaknima $\tau_d^{\parallel} = 1.2\text{MPa}$ a dopušteni napon na gnječenje $\sigma_{dp} = 11.5\text{MPa}$.

Rješenje:

- A_z mjerodavni presjek za zatezanje
- A_{τ} mjerodavni presjek za smicanje
- A_p mjerodavni presjek za gnječenje

Dimenzionisanje:

- *Potrebne dimenzije za zatezanje*

$$\sigma_z = \frac{N}{A_z} = \frac{N}{b \cdot a} \leq \sigma_{dz} \rightarrow a \geq \frac{N}{b \cdot \sigma_{dz}} = \frac{70}{12 \cdot 1} = 5.8\text{cm}$$

- *Potrebne dimenzije za smicanje*

$$\tau^{\parallel} = \frac{N}{A_{\tau}} = \frac{N}{c \cdot b} \leq \tau_d^{\parallel} \rightarrow c \geq \frac{N}{b \cdot \tau_d^{\parallel}} = \frac{70}{12 \cdot 0.12} = 48.6\text{cm}$$

- *Potrebne dimenzije za gnječenje*

$$\sigma_p = \frac{N}{A_p} = \frac{N}{b \cdot d} \leq \sigma_{dp} \rightarrow d \geq \frac{N}{b \cdot \sigma_{dp}} = \frac{70}{12 \cdot 1.15} = 5.1\text{cm}$$

Usvojene dimenzije:

$a = 6\text{cm}$, $d = 6\text{cm}$ i $c = 50\text{cm}$, odnosno poprečni presjek grede je $b/h = 12/18\text{cm}$

